



MINISTÈRE DE L'URBANISME DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

Direction des Routes

LES MICROPIEUX

Mars 1986



AVANT-PROPOS

La technique des micropieux, bien qu'assez ancienne et surtout employée pour les reprises en sous-oeuvre, n'a connu un certain développement dans le domaine des Ouvrages d'Art qu'assez récemment. Elle s'impose aujourd'hui, surtout dans certaines applications particulières, comme une technique de fondation à part entière.

Le présent document a pour objet de présenter certains aspects de cette technique. Il n'est certes pas exhaustif, mais peut donner aux projecteurs certains éléments utiles lorsque l'emploi de micropieux est envisagé. Il est le fruit d'une étude confiée par le S.E.T.R.A. à la Division des Ouvrages d'Art du C.E.T.E. d'AIX-EN-PROVENCE.

Il est demandé aux utilisateurs de ce document de bien vouloir nous faire part de leurs observations éventuelles (Arrondissement G.2 du DOA du S.E.T.R.A. - MM. HAIUN et RENAULT) et de tous renseignements susceptibles de le modifier ou de le compléter utilement.

Ont assuré la rédaction de ce document :

- . M. J.J. AZUAR C.E.T.E. D'AIX-EN-PROVENCE
- . M. J. RENAULT S.E.T.R.A. - BAGNEUX

Ont participé à son élaboration directement ou indirectement, par les études qu'ils ont effectuées et dont s'inspire largement ce document :

- . CADILHAC L.R. DU BOURGET
- . SOUCHE S.E.T.R.A. - BAGNEUX

S O M M A I R E

1. INTRODUCTION - DOMAINE D'EMPLOI	5
2. TECHNOLOGIE - MISE EN OEUVRE	5
2.1. Définition des micropieux	5
2.2. Dénomination suivant le type d'armature employé	6
2.3. Mode de mise en place dans le terrain	7
3. COMPORTEMENT DES MICROPIEUX	11
3.1. Mobilisation de la résistance de pointe	11
3.2. Frottement latéral	12
3.3. Effet de groupe	14
4. CAPACITÉ PORTANTE D'UN MICROPIEU	15
4.1. Généralités	15
4.2. Evaluation de l'effort total mobilisable par frottement latéral ..	17
4.3. Evaluation de l'effort total mobilisable sous la pointe	17
4.4. Charge limite	18
4.5. Prévision de la charge de fluage	18
5. JUSTIFICATION DES MICROPIEUX	18
5.1. Justifications vis-à-vis du sol	19
5.2. Justifications des micropieux vis-à-vis des critères de résistance des matériaux	20
6. LIAISON ENTRE LES MICROPIEUX ET LA SUPERSTRUCTURE	22
6.1. Reprises en sous-oeuvre	22
6.2. Fondations d'ouvrages neufs	27
7. MISE EN CHARGE DES MICROPIEUX - DÉFORMATION ET TASSEMENT	28
7.1. Généralités	28
7.2. Calcul des déformations et des tassements	28
BIBLIOGRAPHIE	33
ANNEXE Etude sur le flambement	

1. INTRODUCTION - DOMAINE D'EMPLOI

La technique des micropieux a été développée il y a une trentaine d'années : initialement, ils ont été utilisés en Italie sous l'appellation de pieux racines qui sont des pieux forés de petit diamètre scellés au terrain par un mortier. Par la suite, sont apparus des micropieux injectés sous forte pression qui ont permis d'obtenir des portances plus élevées.

Pendant longtemps, cette technique n'a été employée que dans la reprise en sous oeuvre de bâtiments ou d'ouvrages : la légèreté et le faible encombrement des matériels utilisés s'adaptaient particulièrement bien aux conditions d'intervention.

Par la suite, le domaine d'application de cette technique s'est élargi aux fondations d'ouvrages neufs dans certains cas de terrains difficiles ou contenant des obstacles durs divers tels que : anciennes fondations, blocs, couche dure, etc., qu'il serait très onéreux de traverser en forage de grande section (on peut citer les fondations de l'immeuble "Le Formentor" à Monte-Carlo réalisé par SOLETANCHE). Elle peut également être adaptée pour des ouvrages transmettant des efforts alternés de traction-compression.

L'objet de cette étude est de présenter certains aspects de cette technique ; elle se limite à l'utilisation des micropieux dans le domaine des fondations.

On peut cependant citer d'autres domaines d'utilisation des micropieux, tout-à-fait différents, tels que :

- le confortement des pentes : amélioration de stabilité des pentes par clouage,
- le renforcement des sols dans lequel le micropieu est associé au sol pour donner un matériau composite.

2. TECHNOLOGIE - MISE EN OEUVRE

2.1. Définition des micropieux

Le document technique unifié (D.T.U. - 13.2.) de Juin 1978 relatif aux travaux de fondations profondes définit deux types de micropieux :

Le micropieu de type I

C'est un pieu foré tubé de diamètre inférieur à 250 mm. Le forage est équipé ou non d'armatures et rempli d'un mortier au tube plongeur. Le tubage est ensuite obturé en tête et l'intérieur du tubage au-dessus du mortier mis sous pression. Le tubage est récupéré en maintenant la pression sur le mortier. Ce type de micropieux n'est pratiquement pas utilisé pour les ouvrages d'art.

Les "pieux racines" brevetés par FONDEDILE ont été les premiers micropieux de cette catégorie.

Le micropieu de type II

C'est un pieu foré de diamètre inférieur à 250 mm. Le forage est équipé d'armatures et d'un système d'injection qui est le plus souvent un tube à manchettes mis en place dans un coulis de gaine. Si l'armature est un tube métallique, ce tube peut être équipé de manchettes et tenir lieu de système d'injection. Les caractéristiques mécaniques de l'ancrage sont améliorées par l'injection sous pression d'un coulis de scellement.

Les pieux IM (brevet SOLETANCHE), les pilots composites (brevet SEFI), les pieux TM (brevet BACHY) font partie de cette catégorie.

Pour ce type de micropieux, la pression d'injection (et donc, en principe, la capacité portante obtenue) est généralement élevée (de l'ordre de la pression limite, en terrains meubles).

2.2. Dénomination suivant le type d'armature employé

La classification ci-dessus peut être étendue en fonction du type d'armature mis en place ; on distingue ainsi :

Le micropieu à tube

L'armature est constituée par un tube en acier de diamètre, d'épaisseur et de qualité variables suivant la valeur des charges à reprendre (le tube acier constituant ou non le tube d'injection sous pression dans le cas de micropieu de type II) (Fig. 1).

Le micropieu à barres

L'armature est constituée par une ou plusieurs barres groupées, en acier H.A. pour béton armé ou en acier de précontrainte (barres DYWIDAG). Dans le cas de micropieu de type II, le tube d'injection sous pression est intégré au faisceau de barres (Fig 2).

TYPE TUBE

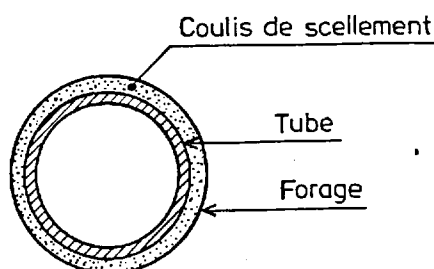


Figure 1 - Type "tube"

TYPE BARRE

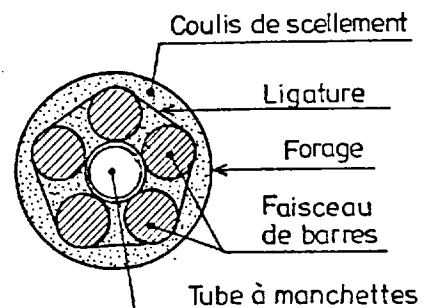


Figure 2 - Type "barres"

Le micropieu à double armature

- . A armature mixte : tube-barre, c'est le cas du pilot composite formé d'une barre centrale et d'un tube extérieur à manchettes.
- . A tube avec adjonction d'un tube intérieur.

Les critères conduisant à choisir entre l'un ou l'autre de ces types sont d'ordres technique et économique. Les tubes épais qui offrent une inertie plus grande que les faisceaux de barres, conviennent mieux que ces derniers dans les terrains présentant des vides ou des sols de très mauvaise qualité pour lesquels il peut y avoir risque de flambement. Pour les ouvrages d'art, il est recommandé d'utiliser des tubes épais.

2.3. Mode de mise en place dans le terrain

Les principales phases de réalisation sont les suivantes :

2.3.1. Réalisation du forage

Le forage est généralement réalisé à l'abri d'un tubage ; il peut être vertical ou incliné et d'un diamètre le plus souvent compris entre 100 et 200 mm.

Le forage peut être exécuté :

- Au marteau fond de trou dans les terrains à forte proportion rocheuse et hors d'eau.
- Au tricône, à l'eau ou à la boue de forage, dans la majorité des cas. La boue bentonitique utilisée est parfois additionnée de ciment (100 à 300 kg/m³) pour limiter des pertes et pour assurer une préinjection du terrain encaissant (avec une simple pression gravitaire).

Le tubage quant à lui semble être systématiquement utilisé lors de la perforation en terrain meuble. Certaines entreprises préfèrent le tubage définitif au tubage provisoire dont le retrait peut être source d'ennuis. Signalons d'ailleurs qu'un tubage définitif entraînant l'outil de perforation permet d'assurer une vitesse de perforation importante et d'éviter une forte décompression du terrain.

On peut cependant remarquer qu'un micropieu peut parfois être mis en place directement par battage, dans des terrains meubles ne contenant pas d'obstacles durs.

2.3.2. Préparation et mise en place de l'armature dans le forage

En ce qui concerne les micropieux de type I (qui peuvent ne pas être armés), le DTU ne donne aucune règle relative à l'utilisation des armatures éventuelles.

Les micropieux de type II sont, quant à eux, obligatoirement armés, les efforts étant repris par les armatures uniquement.

Mis à part le cas où les conditions de travail permettent d'utiliser des armatures continues (hauteur disponible importante, notamment), celles-ci sont généralement mises en place par jonction d'éléments dont la longueur unitaire est imposée par la hauteur disponible. Deux types de rabotage sont principalement utilisés : le manchonnage et la soudure. Les manchons peuvent être vissés (par exemple en cas d'utilisation de barres type DYWIDAG ou GEWY) ou encore sertis. Dans ce dernier cas, sertissage du manchon et alésage doivent être réalisés en usine pour garantir leur qualité. Si l'équipement comporte plusieurs barres, il est nécessaire de décaler les jonctions.

Le DTU précise les dispositions suivantes :

- l'Entrepreneur doit justifier par des essais préalables tout système d'assemblage des armatures,
- lorsque les armatures sont constituées par des éléments tubulaires ou des faisceaux de barres soudées bout-à-bout, le soudage à l'arc électrique est seul admis dans les conditions fixées par la fiche d'identification des aciers utilisés et selon les règles de l'Institut National de Soudure,

La longueur d'armatures non injectée sous pression des micropieux peut être revêtue d'une peinture anti-corrosion. Les peintures les plus couramment utilisées sont du type brai-époxy, mises en oeuvre par trempage ou du type minium appliqué en deux couches.

Cette peinture complète la protection contre la corrosion que peut constituer la gaine de coulis dans la mesure où celle-ci peut faire localement défaut, par suite d'une mauvaise exécution.

Les armatures doivent être munies d'écarteurs et de centreurs pour assurer leur verticalité et permettre un enrobage minimal de celles-ci (limitation du risque de flambement et protection contre la corrosion).

Une fois les armatures en place dans le forage, la première opération consiste à substituer la boue de forage par un coulis de gaine, si cela n'a pas été fait préalablement. Dans la plupart des cas en effet, cette substitution intervient avant même l'insertion des armatures. Dans tous les cas, elle doit s'effectuer à partir du fond du forage.

2.3.3. Ancrage du micropieu dans le terrain

L'ancrage des micropieux au terrain peut être réalisé de deux façons suivant le type de micropieux.

a) - Micropieux de type I

Le forage est rempli par un mortier, mis en place au tube plongeur. Le dosage minimal en ciment de ce mortier est fixé par le DTU à 500 kg/m^3 . On doit maintenir, pendant le remplissage, une pression modérée au-dessus du mortier pour assurer le bon moulage de celui-ci dans le sol.

Un ancrage réalisé selon cette méthode confère au micropieu un fonctionnement comparable à celui des pieux forés classiques mobilisant le frottement latéral coulis-sol. En effet, les pressions mises en oeuvre ne permettent ni de recomprimer le terrain, ni d'essorer le coulis. La figure 3 (voir page suivante), schématise les différentes phases de réalisation de ce type de micropieux.

Selon les conditions de mise en oeuvre, on peut parfois utiliser des adjuvants (retardateur, accélérateur de prise ou de durcissement, fluidifiant).

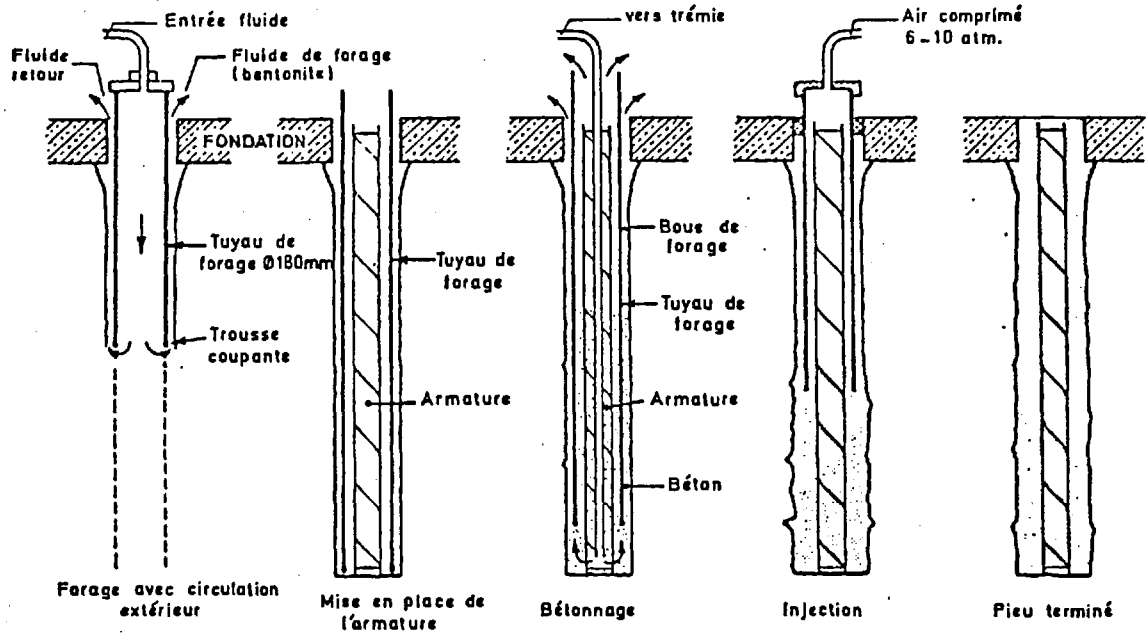


Figure 3 - Réalisation des micropieux de type I

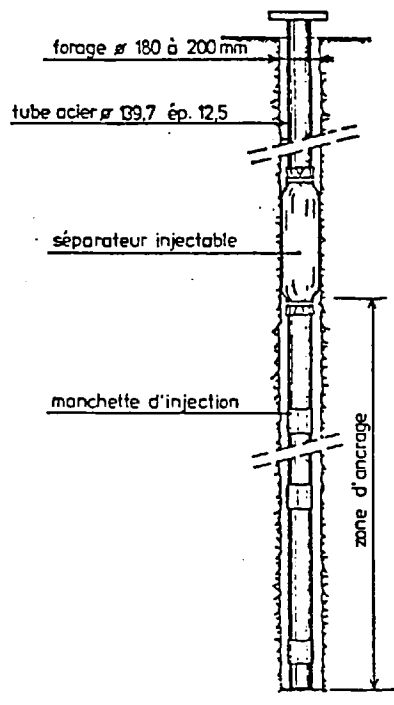
b) - Micropieux de type II

L'ancrage est obtenu par injection sous pression d'un coulis de scellement après durcissement du coulis de gaine ; le D.T.U impose, pour le coulis d'injection, un dosage minimal en ciment de 1.200 kg/m^3 ce qui correspond à un rapport pondéral ciment/eau (C/E) de 2 environ. Dans certains cas, la charge en ciment peut être supérieure et ce rapport atteindre 2,2.

Les coulis utilisés pour sceller les micropieux sont donc beaucoup plus riches en ciment que les coulis d'injection de traitement des sols pour lesquels le rapport C/E varie généralement entre 0,5 et 1. En fait, en matière de traitement de sols, on recherche des coulis de faible viscosité leur permettant de pénétrer suffisamment dans les sols par imprégnation ou claquage pour améliorer leurs caractéristiques ; par contre, l'objectif poursuivi ici est de contenir le coulis autour de l'armature pour former le bulbe de scellement et d'obtenir un coulis de forte résistance pour mobiliser des contraintes d'adhérence élevées entre l'acier et le coulis d'une part et entre le coulis et le sol d'autre part.

Le scellement sous pression implique l'utilisation de technologies similaires à celles utilisées pour les tirants d'ancrage. Des clapets ou manchettes répartis dans la zone d'ancrage permettent de distribuer de manière homogène le coulis de scellement dans toute la zone à sceller (Fig. 4). On prévoit en général un dispositif de séparation permettant d'isoler la zone d'ancrage de la partie supérieure du micropieu. On commence par injecter le séparateur de façon à bien délimiter ces deux zones et à permettre un bon essorage du coulis dans la zone de scellement ; on injecte ensuite chaque manchette en montant ou en descendant le tube d'injection muni d'un double obturateur le long du forage dans l'horizon ainsi déterminé. Les manchettes permettent de choisir pour chaque zone le traitement convenable en ce qui concerne le nombre de phases d'injection, la pression et la quantité de coulis et évitent toute remontée du coulis dans le tube.

La figure 5 schématise les différentes phases de réalisation d'un tel ancrage.



- Figure 4 -
Schéma de principe
d'un micropieu avec
séparateur injectable

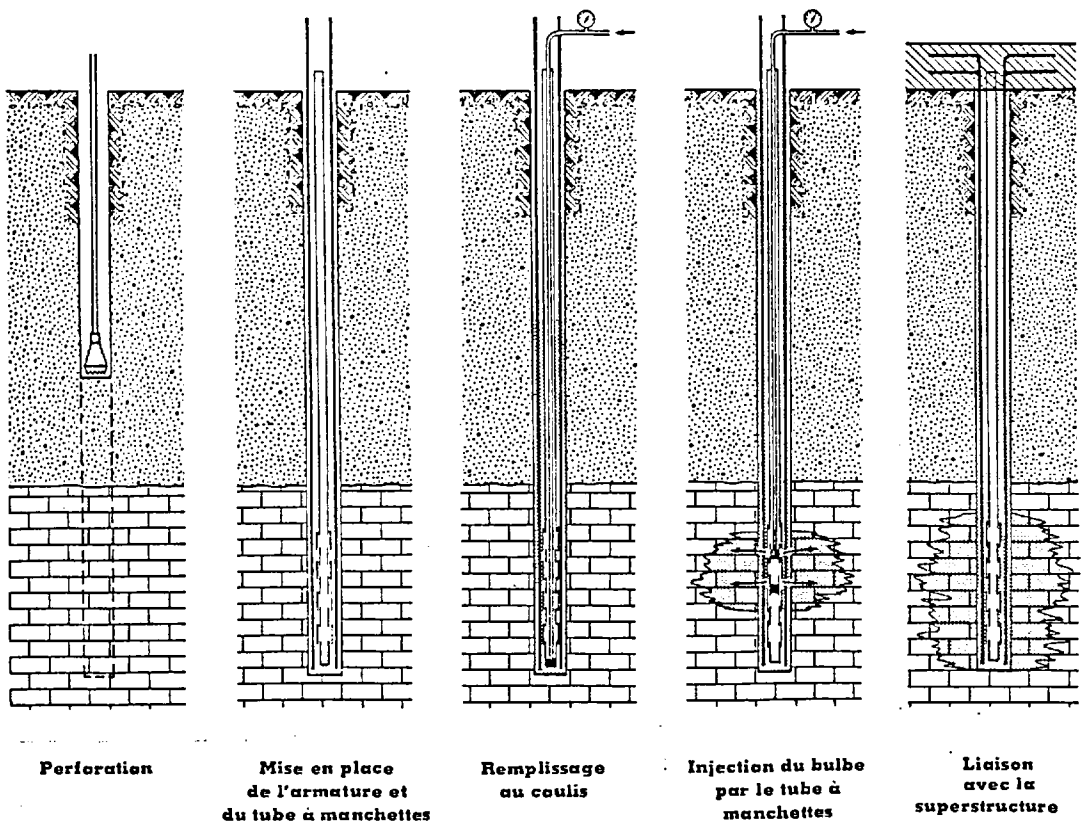


Figure 5 - Phases d'exécution d'un micropieu de type II sans séparateur injectable

La pression d'injection constitue l'un des paramètres qui influe le plus sur la capacité portante d'un micropieu. Pour obtenir la formation du bulbe dans la zone de scellement, il est inutile que la pression effectivement appliquée au terrain soit élevée ; il faut au contraire éviter les claquages peu efficaces pour le scellement et par ailleurs, consommateurs de coulis. Il faut cependant souligner qu'en l'état actuel des connaissances, il est impossible d'apprécier exactement la pression efficace de scellement que l'on applique au terrain. En effet, les seules valeurs de la pression mesurables actuellement se situent à la sortie de la presse et à la tête de forage. On peut estimer par ailleurs que dans les conditions d'exécution habituelles, la perte de charge entre la tête du forage et l'obturateur atteint facilement 1 MPa. Par contre, les pertes de charge à travers le coulis de gaine et le bulbe déjà formé sont très importantes et très difficilement quantifiables puisque le coulis ne circule qu'à travers les fissures existantes ou qu'il provoque. En conséquence, seule l'observation de l'évolution de la pression en tête de forage et du volume injecté peut actuellement renseigner le déclenchement des claquages sans pour autant permettre de connaître la pression effectivement appliquée au terrain. Un tel suivi, qui est indispensable pour s'assurer de la bonne exécution du scellement, doit comprendre également un contrôle des débits d'injection. Si le bulbe est en cours de formation la pression augmente lorsque le volume injecté croît. Cette croissance est naturellement limitée, car on obtient soit :

- une pression de claquage (la pression chute rapidement),
- la pression limite du sol (la pression reste alors à peu près constante lorsque le volume injecté augmente).

Si l'on veut éviter les pertes de coulis on arrête alors l'injection et on passe à un autre point d'injection. Pendant ce temps, le coulis mis en place fait prise. Puis on revient injecter au même point pour atteindre la pression d'injection désirée. C'est généralement un essai préliminaire ou une connaissance préalable des terrains d'ancrage qui permet de fixer la pression finale d'injection.

Par ailleurs, compte tenu des diverses pertes de charge entre la presse et le terrain dans lequel se forme le scellement, il est nécessaire de disposer d'une pression de plusieurs MPa à la centrale.

3. COMPORTEMENT DES MICROPIEUX

3.1. Mobilisation de la résistance de pointe

Dans certains cas, le terme de pointe calculé par les méthodes habituelles pour les pieux courants peut atteindre des valeurs non négligeables. Par exemple, pour un micropieu de type II, constitué d'un tube métallique 178/157, mis en place dans un forage de 200 mm et encastré dans un substratum marneux, la charge limite en pointe peut atteindre 350 à 400 kN. Toutefois ce terme est souvent négligé compte tenu notamment des tassements nécessaires à sa mobilisation (en particulier en cas d'utilisation des micropieux pour des reprises en sous-oeuvre). En tout état de cause, la prise en compte du terme de pointe impose d'assurer un bon contact coulis-sol en pointe.

3.2. Frottement latéral

3.2.1. Généralités

Compte tenu de la faible section des micropieux et de la remarque précédente, la charge appliquée est donc pour l'essentiel transmise au sol par frottement latéral.

L'accroissement du frottement latéral unitaire des micropieux de type II par rapport aux micropieux de type I est bien évidemment lié à l'injection sous pression :

- d'une part, il y a formation d'un bulbe de scellement lié au pieu qui entraîne une augmentation de la surface latérale par laquelle ces charges sont transmises au terrain ; par ailleurs, des observations de bulbes de scellement ont montré que leur état de surface est très inégal ce qui améliore encore l'adhérence au terrain,
- d'autre part, l'injection entraîne généralement par imprégnation ou serrage, suivant la perméabilité du terrain au coulis de ciment, une amélioration des caractéristiques du sol au voisinage du bulbe ; de ce fait, la rupture se produit, non pas à la jonction coulis/sol, mais probablement à la périphérie de la zone de terrain consolidé.
- Enfin, l'essorage du coulis dans les terrains perméables ou sa décantation dans les terrains peu perméables entraîne une augmentation de la rigidité du coulis et donc de sa résistance ; l'adhérence du coulis à l'acier est donc très importante. Le risque de rupture par défaut de celle-ci est alors très faible.

Avec les micropieux de type I, la faible pression appliquée au-dessus du mortier lors de l'opération de bétonnage-détubage peut au plus compenser la décompression du terrain consécutive au forage et au détubage.

3.2.2. Influence de la quantité de coulis injecté sur la capacité de scellement

Si l'injection est conduite sans provoquer de claquage, l'augmentation de volume du bulbe par l'apport de coulis s'accompagne d'un accroissement de la surface latérale du bulbe et par suite de la capacité de scellement. L'influence de la quantité de coulis injectée sur la capacité de scellement a été étudiée par MM. GOUVENOT, GABAIX et BUSTAMANTE(*).

Les essais effectués montrent que la capacité limite de la fondation scellée sous pression Q_L varie pratiquement comme la racine carrée du volume total de coulis injecté (volume du coulis de gaine + volume injecté) ; ceci dans les sables comme dans les argiles (Fig. 6).

* MM. J.C. GABAIX, BUSTAMANTE et D. GOUVENOT.
(Annales I.T.B.T.P. Sept. 75).

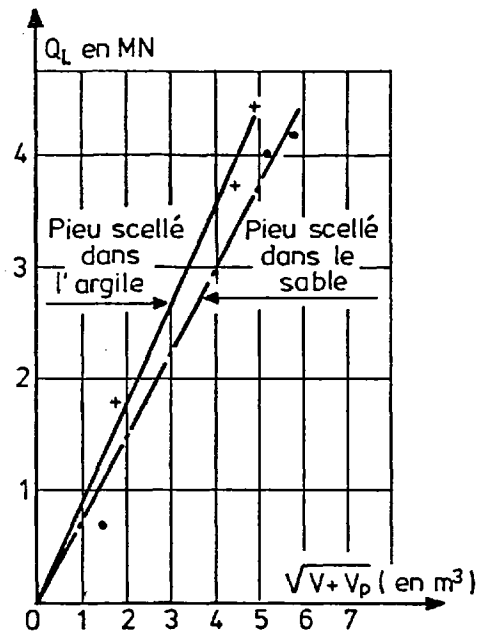


Figure 6 : Variation de la capacité limite du scellement en fonction du volume total injecté

Le diamètre du bulbe de scellement cylindrique fictif correspondant à la capacité limite observée Q_L , est défini par l'expression :

$$Q_L = \pi \cdot \varnothing_s \cdot L \cdot f$$

\varnothing_s : diamètre du bulbe de scellement fictif de volume V_s

$$V_s = \frac{\pi \cdot \varnothing_s^2 \cdot L}{4} \quad \text{et } V_s = V + V_p$$

Avec :

V : Volume du coulis de gaine.

V_p : Volume du coulis injecté sous pression.

L : Longueur de scellement.

f : Frottement latéral limite le long du bulbe.

Tout se passe comme si le volume du bulbe fictif V_s était égal au volume total de coulis. Ceci n'est bien sûr qu'une interprétation, car il est certain que tout le volume de coulis injecté ne se retrouve pas sous la forme d'un bulbe cylindrique autour de l'armature ; en effet :

- les claquages ne peuvent être totalement évités,
- lors de sa progression, le coulis perd une partie de son eau par essorage,
- le bulbe ne se forme pas régulièrement tout autour du tube d'injection.

Il semble que le bulbe fictif soit constitué d'un bulbe en coulis de ciment et d'un volume de sol adhérent, consolidé autour du bulbe.

Le raisonnement précédent n'est bien sûr pas applicable aux formations rocheuses pour lesquelles l'expansion ne peut se produire. Dans ces terrains le diamètre de scellement est voisin du diamètre de forage.

En conclusion, si à partir des essais de chargement effectués par M. GOUVENOT, on calcule le frottement latéral unitaire sur la base du diamètre du bulbe fictif de scellement on obtient des valeurs qui sont supérieures à celles des pieux mis en oeuvre sous faible pression, mais du même ordre de grandeur (1,25 à 1,8 fois plus grandes). Cela tend à montrer que l'augmentation de capacité portante est due essentiellement à l'augmentation du diamètre du bulbe de scellement.

3.3. Effet de groupe

L'exécution de pieux rapprochés fait qu'en général la capacité portante du groupe de pieux est différente de la somme des capacités portantes des pieux considérés comme isolés. C'est "l'effet de groupe" que l'on peut caractériser par le coefficient d'efficacité C_e :

$$C_e = \frac{\text{charge limite du groupe}}{n. \text{ charge limite du pieu isolé}}$$

(n : nombre de pieux du groupe).

Cet effet est négligeable pour les pieux travaillant en pointe et ne mérite d'être relevé que pour les pieux résistant par frottement latéral. Selon les sols, le mode d'exécution des pieux et leur espacement, la capacité portante du groupe peut être supérieure ($C_e > 1$) ou inférieure ($C_e < 1$) à la somme des portances des pieux pris isolément.

Les micropieux, employés presque toujours en groupe et résistant surtout par frottement latéral, correspondent donc bien au cas où l'effet de groupe devrait être a priori pris en considération. Malheureusement, les données expérimentales qui permettraient de préciser des valeurs du coefficient C_e propres aux micropieux sont des plus limitées, citons :

- les essais sur modèles réduits (micropieu de type I), faits par LIZZI (dont les principaux résultats sont rassemblés sur la fig. 7):
 - . pieux de 10 mm de diamètre (barres d'acier de 8 mm de diamètre enduites d'un mortier de sable et résine pour en rendre la surface rugueuse ; longueurs variant de 50d à 200d avec d : diamètre du pieu) ; terrain d'essai : sable sans cohésion,
 - . groupe de trois pieux d'entraxe S variable.

Ces essais ont conduit à un coefficient d'efficacité C :

- $C > 1$ pour $2d < S < 7d$
- $C = 1,3$ pour S voisin de 4d et pour les micropieux de plus grande longueur (200d)
- $C = 1$ pour $S > 7d$

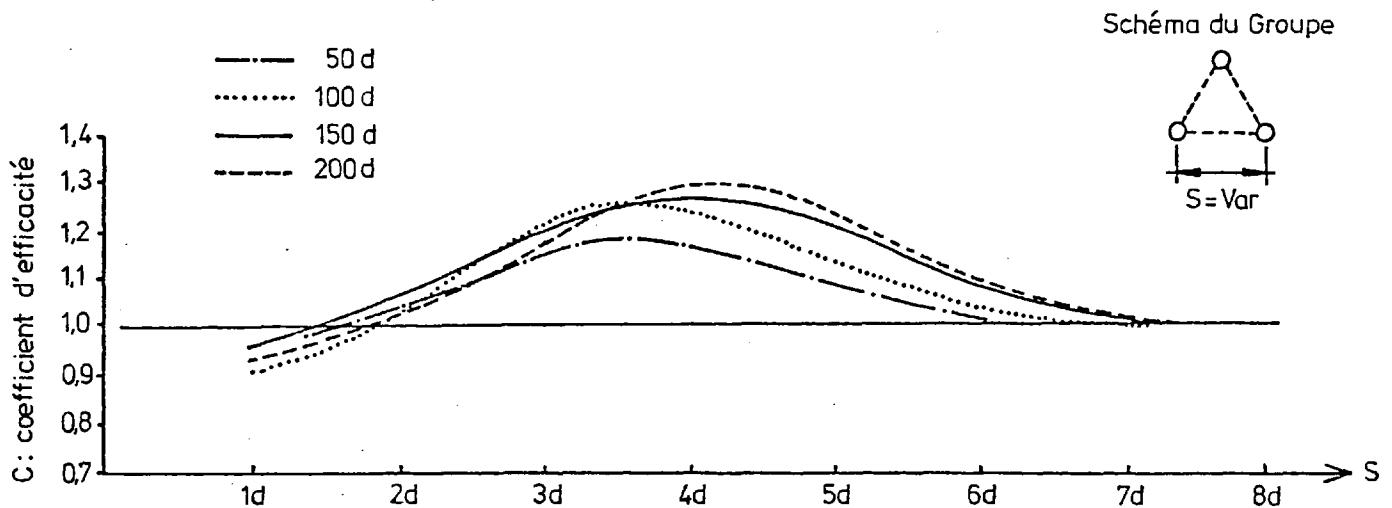


Figure 7 - Coefficient d'efficacité des pieux en groupe

- un essai d'arrachement sur un groupe de trois micropieux de 14 m de longueur ($\emptyset = 100$ mm), scellés sur 9 m dans des alluvions lors du chantier du pont de PUTEAUX qui a donné $C = 1,18$.

Les résultats qui découlent des essais de MM. LIZZI et CARNAVALE, confirmés par un seul essai in situ d'arrachement de 3 pieux ne peuvent suffire à adopter un coefficient d'efficacité supérieur à 1 (pour des entraxes de pieux compris entre 2d et 7d). Les valeurs de C trouvées sur modèles réduits sont valables, comme l'indiquent leurs auteurs pour la situation spécifique du terrain (sable sans cohésion) et les pieux employés dans les essais. En effet, le faible diamètre des pieux utilisés ($d = 10$ mm), conduit à un entraxe de 4 cm environ pour atteindre la valeur maximum de C ; on peut envisager dans ce cas, que le terrain enserré par les pieux s'appuie comme un tout unique sur et le long du terrain dans lequel il est enterré. Par contre, lorsque l'on passe à des micropieux réels, le diamètre de forage variant de 100 à 200 mm, le maximum de C se situerait pour un entraxe valant respectivement 0,40 m et 0,80 m environ ; l'écart important entre ces valeurs et celles sur modèles réduits ne permet pas de transposer, sans expérimentations complémentaires (essais en vraie grandeur qui devront porter sur les différentes catégories de sols et sur les deux types de micropieux), les valeurs de C déduites des travaux de MM. LIZZI et CARNAVALE aux groupes de micropieux réels.

En l'état actuel de nos connaissances, il est donc recommandé de ne pas tenir compte d'une éventuelle augmentation de la portance par effet de groupe.

4. CAPACITÉ PORTANTE D'UN MICROPIEU

4.1. Généralités

Les règles de calcul de la capacité portante des micropieux qui suivent sont extraites du document "Règles de justification des fondations sur pieux à partir des résultats des essais pressiométriques" (document SETRA-LCPC), qui a été lui-même élaboré sur la base des travaux de MM. BUSTAMANTE et GIANESELLI.

TABLEAU I

TYPE DE SOL	Micropieux Type I	Micropieux Type II (1)
Argiles ; Limons	Q2	Q5
Sables	Q3	Q5
Graves	Q3	Q6
Craies	Q5	Q6
Marnes ; Marno-calcaires	Q5	Q6
Rocher altéré ou fragmenté	Q6	Q7 (2)

(1) - Injection sélective et répétitive à faible débit.

(2) - Injection sélective et répétitive à faible débit et traitement préalable des massifs fissurés ou fracturés avec obturation des cavités.

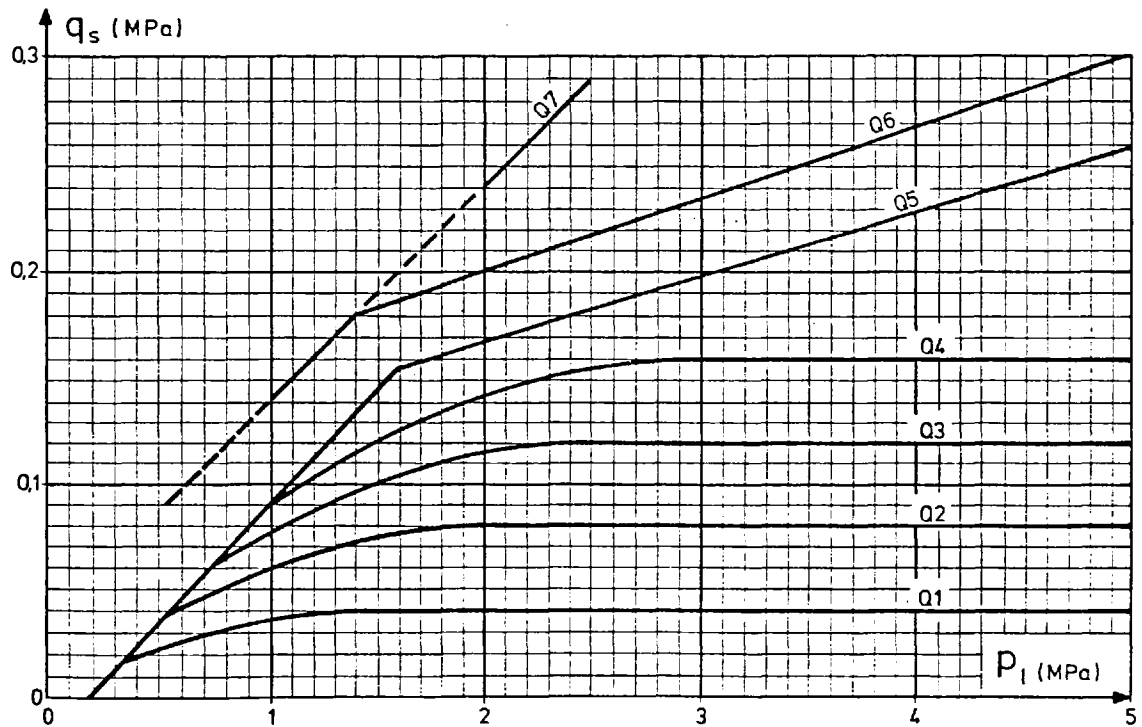


Figure 8 : Frottement unitaire limite

Il faut signaler, toutefois, que les résultats expérimentaux disponibles à ce jour, relatifs à des essais de chargement de micropieux restent encore relativement peu nombreux, en particulier en ce qui concerne la participation éventuelle de la pointe des micropieux à la reprise des efforts. C'est ainsi que les valeurs proposées ci-après du facteur de portance et du frottement latéral unitaire, pourraient être quelque peu modifiées ultérieurement en fonction de résultats d'essais complémentaires.

4.2. Evaluation de l'effort total mobilisable par frottement latéral

La figure 8 présente un ensemble de courbes permettant de définir la valeur du frottement unitaire limite q_s mobilisable, en fonction du taux de compacité ou de serrage du sol, exprimé par la pression limite p_1 . Le tableau I précise la courbe à utiliser en fonction du type de micropieux et de la nature des terrains traversés.

La mobilisation d'un frottement unitaire limite supérieur à celui indiqué par l'abaque en question est généralement probable, mais il ne pourra être adopté que sur la base des résultats d'essais de chargement en vraie grandeur, effectués dans les mêmes formations et sous réserve que les conditions d'exécution soient strictement les mêmes pour les pieux d'essai et ceux de l'ouvrage.

L'effort total mobilisable par frottement latéral vaut alors :

$$Q_{sL} = P \int_0^h q_s(z) dz, \quad P \text{ étant le périmètre du pieu.}$$

4.3. Evaluation de l'effort total mobilisable sous la pointe

Ceci intéresse les micropieux de type I et les micropieux de type II des diamètres les plus importants. Il convient par ailleurs de rappeler également les problèmes de tassement que l'on peut rencontrer quand on envisage de mobiliser la résistance de pointe.

L'effort total mobilisable sous la pointe peut se mettre sous la forme :

$$Q_{pL} = A. (k_p (p_1 - p_0) + q_0)$$

- où :
- . k_p est le facteur de portance de la pointe donné dans le tableau II ci-dessous en fonction du type de sol.
 - . p_1 est la pression limite pressiométrique au niveau de la pointe.
 - . p_0 est la contrainte horizontale (sur un plan vertical) totale au moment de l'essai pressiométrique au niveau envisagé pour la pointe, que l'on peut calculer par :

$$p_0 = u + (\sigma_{v0} - u). K_0$$

avec :

- . σ_{v0} : contrainte totale verticale.
- . u : pression interstitielle.
- . K_0 : coefficient de poussée des terres au repos.

- . q_0 représente la contrainte totale verticale au niveau de la pointe calculée dans la situation où l'on justifie le micropieu.
- . A est la section du forage.

TABLEAU II

Argiles - Limons	1,2
Sables - Graves	1,1
Craies - Marnes Marno-calcaires	1,8
Rocher altéré ou fragmenté	1,1 à 1,8 (1)

(1) - On ne dispose pratiquement d'aucune donnée expérimentale en ce qui concerne le comportement en pointe des pieux dans le rocher altéré ou fragmenté. Dans le peu de cas connus, la charge limite des pieux n'a pu être atteinte, compte tenu notamment des valeurs élevées des pressions limites qui caractérisent ces formations. Aussi, s'il est reconnu que le matériau concerné s'apparente assez étroitement à l'un des sols meubles pour lesquels le tableau propose une valeur particulière de k_p , on adoptera celle-ci (par exemple $k_p = 1,1$ dans un rocher altéré ou fragmenté susceptible d'avoir un comportement proche d'un sable ou d'une grave compact). Une telle valeur de k_p , probablement assez prudente, n'aura toutefois généralement qu'une assez faible incidence sur la charge limite d'un micropieu. En tout état de cause, des valeurs de k_p supérieures à 1,8 ne pourront être généralement adoptées que sur justification expérimentale.

4.4. Charge limite

La charge limite Q_L est la somme des deux termes Q_{pL} et Q_{sL} :

$$Q_L = Q_{pL} + Q_{sL}$$

4.5. Prévision de la charge de fluage

Dans l'attente de résultats complémentaires d'essais de chargement de micropieux en vraie grandeur, on pourra adopter provisoirement pour la charge de fluage, la même valeur que pour les pieux forés classiques (Cf. document sus-visé en 4.1.), à savoir :

$$Q_C = \frac{Q_{pL}}{2} + \frac{Q_{sL}}{1,5}$$

5. JUSTIFICATION DES MICROPIEUX

Les combinaisons d'actions nécessaires à la justification des fondations sur micropieux sont celles développées dans le document "Règles de justification des fondations sur pieux à partir des résultats des essais pressiométriques". Ces combinaisons d'actions se réfèrent aux définitions et notations données par les directives communes du 13 Mars 1979 (D.C.79).

5.1. Justifications vis-à-vis du sol

Si Q désigne la charge axiale calculée à partir d'une combinaison d'actions donnée (au niveau de l'encastrement du micropieu dans le terrain) on adoptera les limitations ci-après, Q_C^* désignant la charge de fluage en traction (dans laquelle seul intervient le terme Q_{sL}).

a) - Etats-limites de service

- Combinaisons quasi-permanentes :

- $0,8 Q_C^* \leq Q \leq 0,8 Q_C$ si l'évaluation de Q_C résulte d'un essai de chargement en vraie grandeur.

- $0,7 Q_C^* \leq Q \leq 0,7 Q_C$ si Q_C est estimé suivant les indications du paragraphe 4.

- Combinaisons rares :

- $0,9 Q_C^* \leq Q \leq Q_C$ si l'évaluation de Q_C résulte d'un essai de chargement en vraie grandeur.

- $0,7 Q_C^* \leq Q \leq 0,9 Q_C$ si Q_C est estimé suivant les indications du paragraphe 4.

b) - Etats-limites ultimes

- Combinaisons fondamentales :

- $0,7 Q_{sL} \leq Q \leq 0,8 Q_L$ si l'évaluation de Q_L résulte d'un essai.

- $0,7 Q_{sL} \leq Q \leq 0,7 Q_L$ si Q_L est estimé suivant les indications du paragraphe 4.

- Combinaisons accidentelles :

- $0,7 Q_{sL} \leq Q \leq 0,9 Q_L$ si Q_L résulte d'un essai.

- $0,7 Q_{sL} \leq Q \leq 0,8 Q_L$ si Q_L est estimé suivant les indications du paragraphe 4.

5.2. Justifications des micropieux vis-à-vis des critères de résistance des matériaux

Les justifications qui suivent ne concernent que les micropieux de type II, qui sont pratiquement les seuls utilisés pour les ouvrages d'art.

a) - Justification

La justification des sections d'acier sera effectuée sous sollicitations ultimes.

Les calculs justificatifs sont conduits suivants les principes énoncés aux articles 13 et 14 du fascicule 61, Titre V du C.P.C. en ne tenant compte toutefois que de la section d'acier réduite par corrosion, conformément aux indications du paragraphe b) ci-après et en limitant la contrainte normale à $0,8\sigma_e$.

En raison de leur élancement parfois important, les micropieux devront généralement être justifiés vis-à-vis des phénomènes de flambement. Cette justification sera conduite selon les prescriptions de l'article 16 du fascicule 61, Titre V. Le calcul de la contrainte critique σ^* pourra s'effectuer en tenant compte de la réaction latérale des terrains. A cet égard, on pourra utilement se reporter aux abaques publiés par M. SOUCHE dans le n° 423 des Annales de l'I.T.B.T.P. de Mars-Avril 1984 et reproduits en annexe au présent document. L'attention est attirée, toutefois, sur la nécessité d'adopter une attitude prudente en ce qui concerne les hypothèses et en particulier les conditions de liaison des micropieux en tête et en pied, et la valeur du module de réaction horizontal du sol, de manière à ne pas surévaluer la charge critique de flambement. Ainsi, il est recommandé de considérer le module de réaction horizontal du sol sous charges soutenues, généralement pris égal à la moitié du module de réaction tel qu'il est défini par les règles Ménard et de calculer celui-ci en attribuant au sol une valeur du module pressiométrique très proche des valeurs mesurées dans les couches les moins consistantes.

Ces dispositions sont applicables aux micropieux dont les armatures sont constituées d'éléments tubulaires, en ne tenant compte que de la section d'acier réduite par corrosion, conformément aux indications du paragraphe b) ci-après et en négligeant la participation des coulis mis en oeuvre.

b) - Prise en compte des phénomènes de corrosion

Les calculs justificatifs sont conduits en ne tenant compte que de la section d'acier réduite par corrosion, c'est-à-dire en neutralisant une certaine épaisseur de métal sur l'ensemble du périmètre de la section étudiée.

Le tableau III ci-dessous donne, à titre indicatif, des valeurs moyennes du taux de corrosion, que l'on pourra adopter en l'absence d'études spécifiques (acier nu) :

TABLEAU III - TAUX DE CORROSION DES ACIERS

Nature du milieu	Taux de corrosion annuelle par face
Terrain non agressif hors d'eau	0,02 mm
Présence d'une nappe non aggressive	0,03 mm
Micropieu en eau douce polluée biologiquement ou chimiquement	0,03 à 0,08 mm selon intensité
Micropieu en eau de mer	0,1 mm
Micropieu en eau de mer avec effet d'érosion ou en eau très chaude	0,14 mm

Remarques :

- L'épaisseur d'acier neutralisée par corrosion sera calculée, en règle générale, pour les ouvrages d'art, en considérant une durée de service de 100 ans.
- Pour les micropieux dont l'armature est constituée d'éléments tubulaires, il ne sera pas tenu compte d'une corrosion sur la face intérieure des tubes, à condition que ceux-ci soient entièrement remplis de coulis.
- On pourra admettre qu'un enrobage de mortier ou de coulis de ciment approprié, peut constituer une protection efficace si les dispositions prévues permettent de garantir un enrobage minimal continu de 5 cm et que le mortier ou le coulis mis en oeuvre est dosé à plus de 500 kg/m³, avec un rapport ciment sur eau supérieur à 2.

6. LIAISON ENTRE LES MICROPIEUX ET LA SUPERSTRUCTURE

De nombreuses techniques permettent de résoudre le problème de la liaison entre les micropieux et la superstructure ; en pratique, chaque projet constitue un cas particulier. On peut néanmoins citer certaines solutions qui permettent de traiter la plupart des problèmes.

Les techniques utilisées diffèrent selon le type de mise en oeuvre : nous avons donc établi une distinction entre les micropieux utilisés pour des reprises en sous-oeuvre et ceux utilisés pour réaliser un ouvrage neuf.

6.1. Reprises en sous-oeuvre

Dans cette utilisation des micropieux on rencontre principalement deux types de liaison entre les micropieux et la structure :

- soit les micropieux sont forés à travers la structure elle-même : dans ce cas la liaison est obtenue par adhérence,
- soit la transmission des efforts entre la structure et les micropieux se fait par l'intermédiaire d'une partie rajoutée à l'extérieur de la structure à renforcer.

6.1.1. Transmission des efforts par adhérence

Ce type de mécanisme est surtout valable quand on veut sceller un micropieu (aussi bien vertical qu'incliné) dans un ouvrage massif (bajoyers, mur de front de culées, piles ...). On peut dans ce cas espérer reporter directement les efforts de la structure au pieu par adhérence entre le pieu et le coulis d'injection. La longueur du forage à travers la maçonnerie doit donc être suffisamment importante pour permettre cette transmission des efforts.

Le scellement du micropieu est réalisé à l'aide d'un coulis de ciment ou de résine. Ce coulis d'injection améliore d'ailleurs souvent dans la masse la qualité des maçonneries quand celles-ci sont en mauvais état.

Il est conseillé d'avoir recours à des essais pour déterminer la contrainte d'adhérence admissible entre le coulis et l'acier. En général, les contraintes d'adhérence que l'on peut mobiliser sont de l'ordre de 0,5 MPa pour les aciers lisses et de 1 MPa pour les aciers présentant des aspérités.

Sur les figures 9 et 10 sont représentés des schémas types de reprises en sous-oeuvre par micropieux inclinés forés à travers un mur (Fig. 9) et une pile de pont en maçonnerie (Fig. 10).

Parmi les exemples d'application les plus marquants de ce type de liaison, on peut citer :

- Le renforcement des fondations du "Ponte Vecchio" de Florence (Cf. Fig. 12).

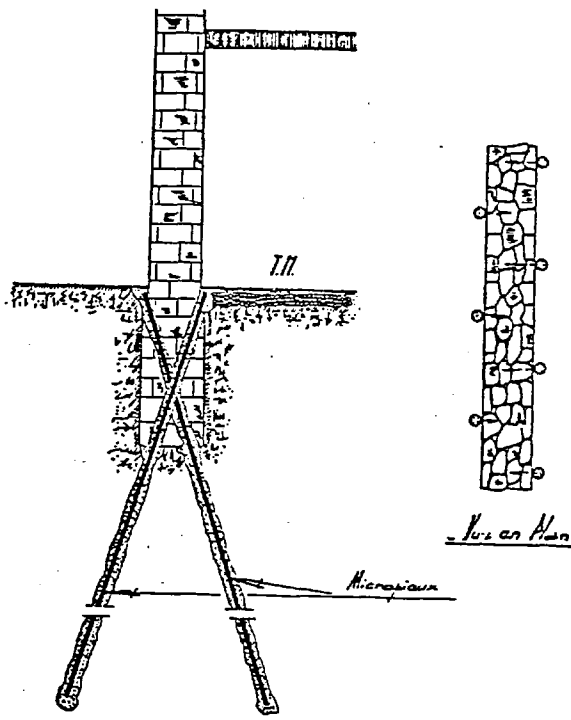


Figure 9 : Reprise en sous-oeuvre d'un mur

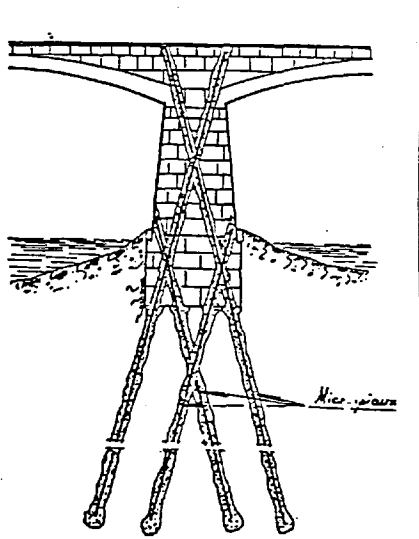


Figure 10 : Reprise en sous-oeuvre d'une pile de pont en maçonnerie

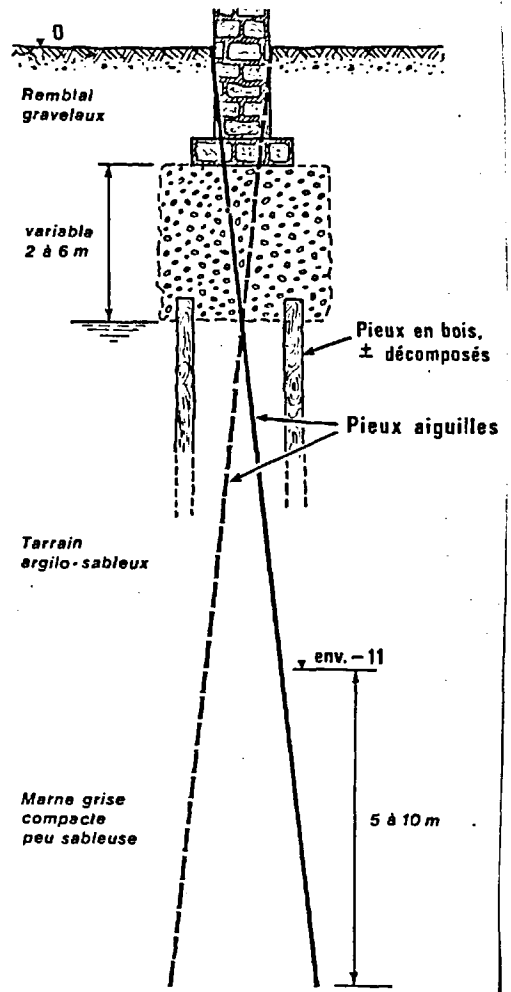


Figure 11 : Renforcement des fondations du Palais de Justice de MARSEILLE

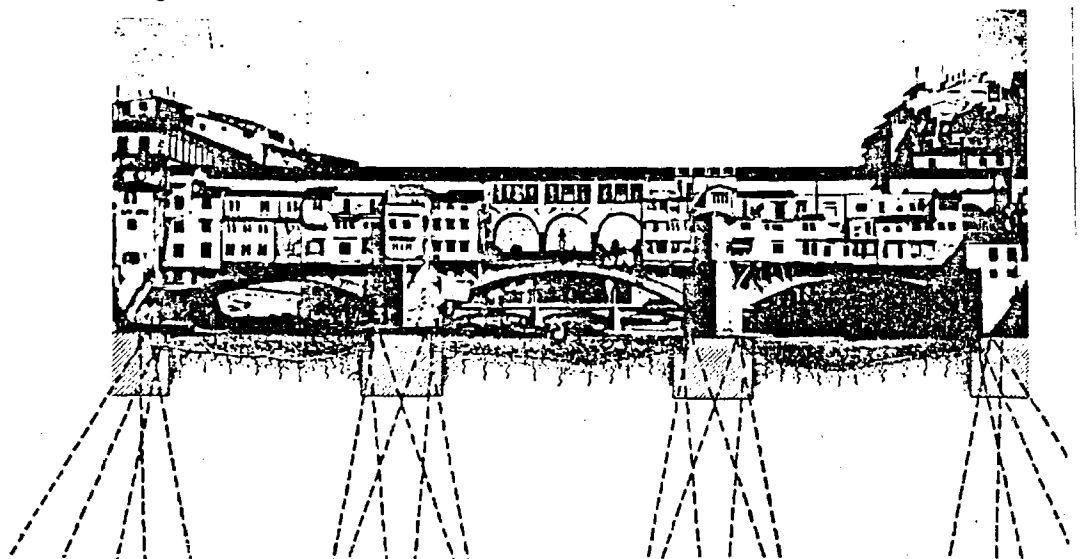


Figure 12 : Reprise en sous-oeuvre du Ponte Vecchio à FLORENCE

Ce pont présentait des dégradations importantes du fait de l'affouillement des piles fondées à faible profondeur. Les travaux confortatifs ont été menés en forant les micropieux à partir de la rivière pour ne pas entraver la circulation et le commerce sur le pont même. La force portante des pieux avait été fixée à environ 10 tonnes.

- Le renforcement des fondations du Palais de Justice à Marseille (Cf. Fig. 11).

Les descentes de charge de ce bâtiment étaient reprises initialement par des murs porteurs et des colonnes reposant sur des semelles de gros béton de 2 à 6 m de hauteur fondées sur des pieux en bois battus dans du limon argilo-sableux.

L'altération des pieux-bois à la suite d'une baisse de niveau de la nappe ayant entraîné des tassements, on procéda en 1974 à la reprise des fondations de cet ouvrage.

La solution retenue a consisté à descendre les charges jusqu'aux marnes calcaires par l'intermédiaire de pieux IM de 32 et 50 tonnes légèrement inclinés et implantés en quinconce par rapport aux murs porteurs. La liaison pieu-massif de maçonnerie a été assurée par injection sur 2 à 6 m de haut d'un coulis C/E = 2.

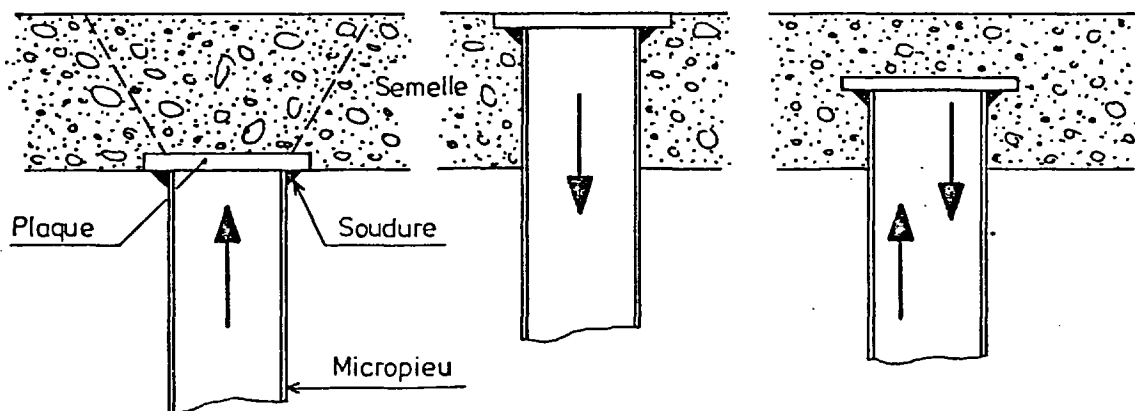
6.1.2. Transmission des efforts par l'intermédiaire d'une partie rajoutée

Quand on ne peut pas forer les micropieux de renforcement à travers la structure, la méthode la plus utilisée consiste à disposer les pieux autour de la semelle à reprendre et à les relier par des longrines qui seront liaisonnées avec la semelle existante.

6.1.2.1. Liaison entre le micropieu et la longrine rajoutée

La technique adoptée le plus couramment pour reporter les efforts du micropieu à la longrine consiste à souder ou à emmancher une platine sur l'about du micropieu de façon à transmettre les efforts par compression ou traction.

Suivant le mode de travail du micropieu, on pourra avoir les trois configurations suivantes :



Compression

Traction

Traction - compression

Les vérifications à entreprendre porteront donc sur les deux points suivants :

- nécessité d'un frettage du béton au-dessus ou en-dessous de la platine du fait des concentrations de contraintes existant dans ces zones,
- vérification de la dalle au poinçonnement.

Une technique également utilisée consiste à transmettre les efforts par adhérence entre le pieu et le béton de la semelle. Cette technique impose néanmoins des hauteurs de semelles qui peuvent ne pas s'avérer économiques.

6.1.2.2. Liaison entre la longrine rajoutée et l'ouvrage existant

Le micropieu étant ancré dans la longrine, il s'agit maintenant de transmettre une partie de la descente de charge de l'ouvrage aux micropieux ; deux techniques sont habituellement envisagées :

- un fonctionnement en béton armé,
- un fonctionnement en poutre précontrainte.

6.1.2.2.1. Fonctionnement en béton armé

Si l'on suppose que la structure constituée par la longrine et la partie d'ouvrage à reprendre fonctionne comme une poutre en béton armé, il est nécessaire de couder la zone de reprise par des aciers de couture répartis sur toute la hauteur de la reprise : il faut donc prévoir une section totale d'acier de couture pouvant reprendre l'effort transmis au micropieu ; dans le cas de la figure 13, cette section vaudrait :

$$A_c = \frac{3}{4} \frac{P}{\sigma_e}$$

De plus, il convient de dimensionner les armatures de traction dans la semelle composite ainsi créée : on peut pour cela imaginer que la semelle fonctionne en bielles ou en console courte. Le dimensionnement de ces aciers s'effectue de façon classique comme dans le cas de semelles sur pieux d'ouvrages neufs.

Toutefois, et d'une manière générale, il semble difficile de réaliser à l'aide d'armatures passives, l'accrochage entre l'ancienne et la nouvelle structure qui permettrait d'arriver aux mécanismes que nous venons de citer : en effet, pour pouvoir faire transiter les charges de l'ancienne à la nouvelle structure, il est nécessaire d'obtenir un monolithisme parfait de l'ensemble ; or, un décollement de la nouvelle structure par rapport à l'ouvrage existant semble inévitable ne serait-ce que du fait du retrait. De plus, le contact entre l'ancienne et la nouvelle structure, déjà compromis par les micro-fissures de retrait, ne sera en rien amélioré par la présence d'armatures traversant l'ouvrage existant, le nouvel ouvrage relativement rigide ne pouvant se déformer : les armatures seront alors sollicitées au cisaillement pur. On peut ajouter à la charge de cette technique les difficultés que l'on aura à ancrer les aciers dans la structure existante, surtout s'il s'agit d'un ouvrage en maçonnerie.

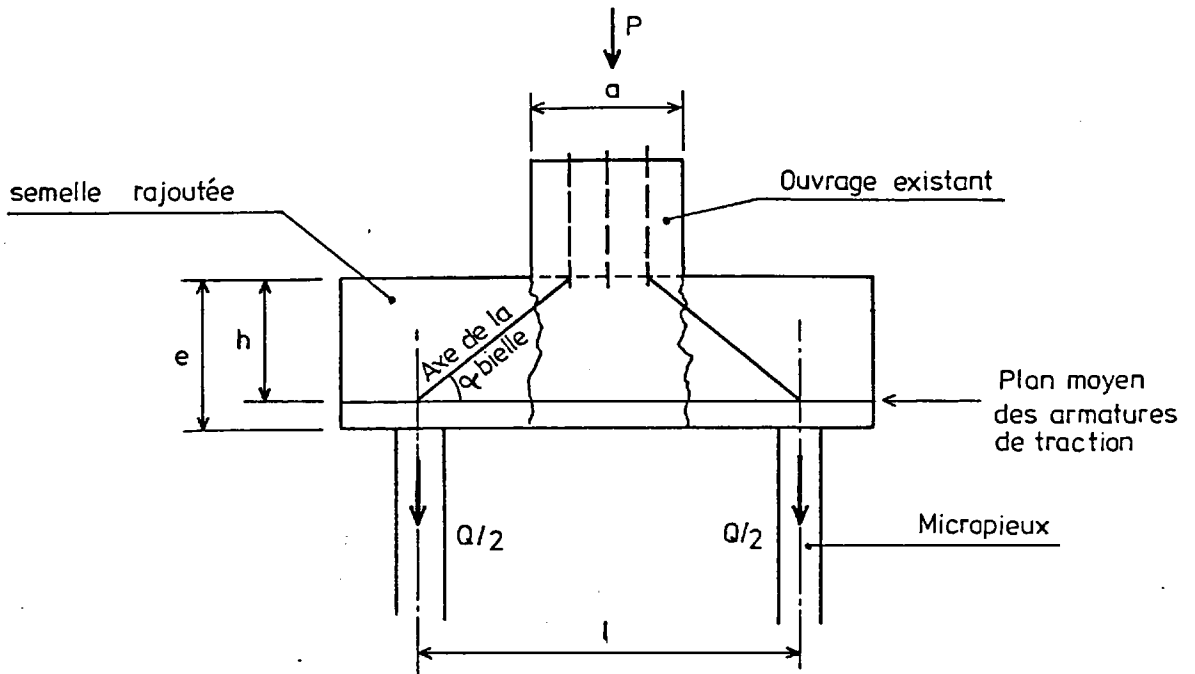


Figure 13 : Fonctionnement en bielles

6.1.2.2.2. Fonctionnement en béton précontraint

Dans tous les cas, nous préconiserons donc pour créer une semelle monolithique de relier la nouvelle structure à l'ancienne par des barres précontraintes : la tension dans ces tirants devra engendrer dans la surface de reprise un effort de compression suffisant pour éviter que l'ouvrage existant ne "coulisse" dans la semelle : on prévoit habituellement un effort de compression N égal à Q , étant compris entre 2 et 3 (Cf. Figure 14).

Cette technique nécessite cependant un soin particulier pour arriver à obtenir la force de précontrainte prévue dans les barres de faible longueur.

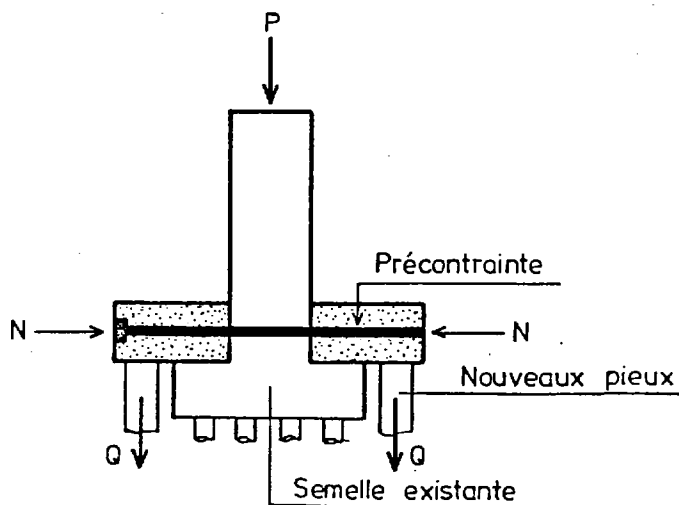


Figure 14 : Fonctionnement en béton précontraint

6.2. Fondation d'ouvrages neufs

Dans ce cas, la liaison entre les micropieux et la semelle de fondation est beaucoup plus facile à réaliser.

Parmi les solutions proposées, celles que l'on rencontre le plus couramment sont les suivantes :

- liaison par adhérence avec un massif de béton fretté.
- liaison par coiffe et platine de répartition soudée ou manchonnée. Cette technique a déjà été décrite au paragraphe 6.1.2.1. ci-dessus;
- liaison par formage en crosse de l'extrémité des aciers dans le cas d'armatures constituées par des aciers à béton.

7. MISE EN CHARGE DES MICROPIEUX - DÉFORMATION ET TASSEMENT

7.1. Généralités

La vérification des déformations et des tassements des micropieux est un point important ; la valeur de ceux-ci peut souvent conditionner la charge qu'il sera possible d'appliquer aux micropieux, particulièrement dans le domaine des reprises en sous-oeuvre, en ce sens que peu de structures sont capables de supporter des tassements de quelques centimètres sans dommage.

Ainsi, malgré leur capacité portante souvent élevée, il est parfois nécessaire, pour les reprises en sous-oeuvre, d'utiliser les micropieux sous des charges unitaires réduites conduisant à des tassements très faibles. Le transfert des charges de l'ancienne à la nouvelle fondation se produit alors de façon progressive et plus ou moins complète à long terme selon les cas, pour des tassements de quelques millimètres.

Il existe également des techniques de mise en charge des micropieux à l'aide de vérins plats. Celles-ci consistent à insérer entre l'ouvrage et la tête du micropieu un vérin plat ; on injecte ensuite sous pression de la résine ou du coulis ; quand la pression est atteinte, on obture ; le coulis fait prise, assurant la pérennité du calage (Réf. MM. SOUCHE, MILLAN, FAUCHOUX, LEVILLAIN, MARTIN).

L'avantage de cette méthode consiste essentiellement dans le fait que les micropieux sont tout de suite "opérationnels", par contre, on fait généralement abstraction de la fondation existante.

7.2. Calcul des déformations et des tassements

Différentes méthodes de calcul des déformations des micropieux ont été proposées dans la littérature : nous n'en exposerons ici que quelques-unes.

7.2.1. Méthodes simplifiées

Dans ces méthodes, seule la déformation propre du micropieu est prise en compte, le frottement latéral mobilisé étant supposé indépendant des déplacements du micropieu et le terme de pointe étant négligé.

7.2.1.1. Prise en compte du coulis et de l'acier

La charge est dans ce cas répartie entre le coulis et l'acier et l'on a :

$$N = \sigma_c S_c + \sigma_a S_a$$

Puisqu'il y a égalité des déformations entre le coulis et l'armature on a de plus :

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{N}{E_c S_c + E_a S_a} = \epsilon$$

On posera dans la suite $ES = E_a S_a + E_c S_c$

Si on appelle $\tau(z)$ le frottement latéral à la profondeur z , la variation d'effort normal entre z et $z + dz$ s'exprime par :

$$dN = -\pi \cdot \theta_f \cdot \tau(z) dz$$

à la profondeur h (L étant la longueur du pieu) on a donc :

$$N(h) = N_0 - \int_0^h \pi \cdot \theta_f \cdot \tau(z) dz$$

Si l'on suppose de plus que toute la charge est reprise par frottement latéral le long du pieu, on a, si L est la longueur du pieu :

$$\int_0^L \tau(z) \cdot dz = \frac{N_0}{\pi \cdot \theta_f} \quad (1)$$

Dans ces conditions, le déplacement en tête du micropieu vaut donc :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{L \cdot E \cdot S} \cdot \int_0^L N(h) \cdot dh \quad (2)$$

On adopte généralement deux hypothèses pour la mobilisation du frottement latéral :

- soit on le prend constant avec la profondeur,
- soit on le considère proportionnel à la profondeur et l'on prend $\tau(z) = \lambda z$.

a) Frottement latéral constant avec la profondeur

Dans ce cas, en appliquant la formule (1), on obtient :

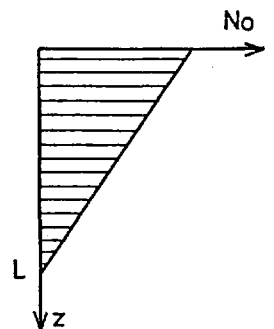
$$\tau = \frac{N_0}{L \cdot \pi \cdot \theta_f}$$

La variation de l'effort normal avec la profondeur s'exprime donc sous la forme :

$$N(h) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{L}\right)$$

Le déplacement en tête du micropieu vaut donc :

$$\mathcal{E} = \frac{N_0 \cdot L}{2E \cdot S}$$



Ainsi, pour un micropieu 139,7/114,7 de 10 m de longueur, le déplacement en tête sous la charge de fluage serait de l'ordre de 3,5 mm.

b) Frottement latéral proportionnel à la profondeur

On a ainsi en appliquant la formule (1) :

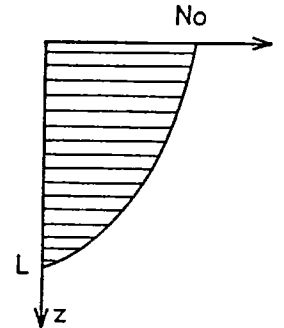
$$\tau(z) = \frac{2N_0}{L^2 \cdot \pi \cdot \phi_f} \cdot z$$

et à la profondeur h, l'effort normal vaut :

$$N(h) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)$$

On en déduit le déplacement en tête du micropieu :

$$\epsilon = \frac{2N_0 \cdot L}{3E \cdot S}$$



Pour le même micropieu que dans le cas précédent, on obtient un tassement en tête de 4,6 mm.

7.2.1.2. Prise en compte de l'acier seul

Si l'on considère le micropieu uniquement comme un pieu métallique simplement enrobé de coulis, conformément au D.T.U. 13.2, on ne doit considérer que les déformations de l'acier puisque la charge est transmise de la structure au pieu par la partie métallique du pieu.

Les expressions que l'on a obtenues plus haut restent valables en prenant $ES = E_a S_a$.

Ainsi, en prenant un frottement constant pour le micropieu précédent, on obtient un déplacement de 4,1 mm pour un pieu de 10 m.

En prenant un frottement proportionnel à la profondeur, on obtient un déplacement de 5,7 mm pour un pieu de 10 m.

7.2.2. Transfert des charges du micropieu au sol

Les principes de base de ces méthodes résultent des observations de H. CAMBEFORT, confirmées par les essais de F. BAGUÉLIN et Associés.

MM. FRANK et ZHAO proposent dans un article du Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées, auquel on pourra se reporter (*), une méthode de détermination des lois de mobilisation du frottement latéral et de l'effort en pointe en fonction du déplacement vertical du pieu, ainsi qu'une méthode numérique simple permettant de résoudre le problème.

* Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées - n° 119
Mai-Juin 1982.

On trouvera ci-après, à titre indicatif, une mise en équation du problème, en prenant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le frottement latéral unitaire micropieu-sol peut se mettre sous la forme :

$$\tau(z) = -B.w(z),$$

où :

- . B est un module de cisaillement tangent
- . $w(z)$ est le tassement du micropieu à la cote z , le tassement $w(z)$ restant inférieur à la limite à partir de laquelle il se produit un glissement entre le micropieu et le terrain.

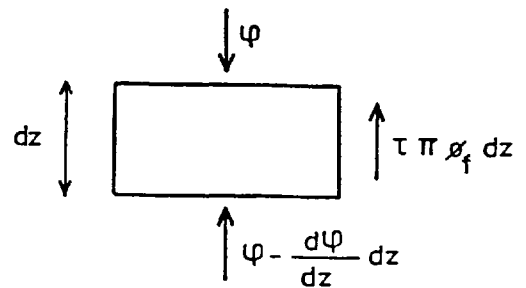
- La charge en pointe du micropieu est nulle.

L'étude de l'équilibre d'une tranche de scellement permet d'écrire :

$$\frac{dQ}{dz} - B.\pi.\varnothing_f.w = 0,$$

avec :

- . \varnothing_f diamètre du forage
- . Q effort normal dans le pieu à la cote z



L'élasticité du scellement permet d'écrire :

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{Q}{ES}$$

D'où l'équation :

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2} - \frac{B.\pi.\varnothing_f}{E.S}.w(z) = 0$$

En posant $\lambda = \sqrt{\frac{E.S}{B.\pi.\varnothing_f}}$ appelé longueur de transfert de la charge axiale, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2} - \frac{1}{\lambda^2}.w(z) = 0,$$

qui a pour solution : $w(z) = A.sh \frac{z}{\lambda} + B.ch \frac{z}{\lambda}$

quée. Pour $z = 0$ (en tête de micropieu), on a $Q(0) = Q_0$ charge appli-

$$\text{Soit : } ES \left(\frac{dw(z)}{dz} \right)_{z=0} = Q_0$$

$$\text{d'où : } A = \frac{\lambda \cdot Q_0}{E \cdot S}$$

Pour $z = L$ (en fiche) en supposant que la charge en pointe est négligeable : $Q(L) = 0$

$$\text{Soit : } ES \left(\frac{dw(z)}{dz} \right)_{z=L} = 0$$

$$\text{d'où : } B = - \frac{\lambda \cdot Q_0}{E \cdot S} \cdot \frac{1}{\text{th}L/\lambda}$$

Le tassement $w(z)$ s'exprime donc par la formule :

$$w(z) = - \frac{\lambda \cdot Q_0}{E \cdot S} \cdot \frac{\text{ch}(L-z/\lambda)}{\text{sh}L/\lambda}$$

Le tassement en tête de scellement vaut alors :

$$w(0) = - \frac{\lambda \cdot Q_0}{E \cdot S} \cdot \frac{1}{\text{th}L/\lambda}$$

Ainsi, pour le micropieu que nous considérons au cas précédent, en prenant une valeur moyenne $B = 4 \times 10^5$ Pa/cm, on obtient pour un pieu de 10 m un déplacement en tête de 5,87 mm : il est du même ordre de grandeur que les tassements obtenus par les premières méthodes.

- . J.C. GABAIX - M. BUSTAMANTE
D. GOUVENOT Essais de pieux scellés par injection sous pression. Annales I.T.B.T.P. n° 331 Septembre 1975.

- . D. GOUVENOT Essais en France et à l'Etranger sur le frottement latéral en fondation : amélioration par injection. Travaux n° 464. Novembre 1973.

- . D. GOUVENOT Essais de chargement et de flambement des pieux aiguilles. Annales I.T.B.T.P. n° 334. Décembre 1975.

- . D. GOUVENOT Quelques réflexions sur les injections de scellement. Annales I.T.B.T.P. n° 358. Février 1978.

- . F. LIZZI Les pieux racines fondedile et les réseaux de pieux racines. Leurs applications dans les travaux de fondations spéciales et de consolidations. Journées de Mécanique des Sols. 1973. Ecole Centrale des Arts et Manufacture.

- . F. LIZZI Restauro statico dei monumenti. Sagep editrice 1981.

- . F. LIZZI Special patented systems of underpinning and, more generally, subsoil strengthening by means of "Pali Radice" with special reference to problems arising from the construction of subways in built-up areas. Document fondedile.

- . F. LIZZI - G. CARNEVALE Les "réseaux de pieux racines" pour la consolidation des sols. Aspects théoriques et essais sur modèles. Colloque International sur le Renforcement des Sols. PARIS. Mars 1979.

- . M. MANDEL Flambement au sein d'un milieu élastique. Annales des ponts et Chaussées. 1936 - 2ème sem. pages 295 - 335.

- . DOCUMENTATIONS SIF BACHY, INTRAFOR-COFOR, SEFI, SEPICOS, SOLETANCHE.

annexe

ETUDE DU FLAMBEMENT DE PIEUX PARTIELLEMENT
IMMERGES DANS UN MILIEU OFFRANT LATERALEMENT
UNE REACTION ELASTIQUE PURE.

par Pierre SOUCHE

ETUDE DU FLAMBEMENT DE PIEUX PARTIELLEMENT
IMMERGES DANS UN MILIEU OFFRANT LATERALEMENT
UNE REACTION ELASTIQUE PURE.

1 - HYPOTHESE DE L'ETUDE ET PRINCIPALES CONCLUSIONS

Il est de plus en plus courant d'avoir à estimer la force théorique de flambement de pieux relativement élancés (micropieux notamment) soumis à des descentes de charges verticales importantes, et traversant des milieux de faibles caractéristiques, voire même totalement dégarnis sur une fraction de leur hauteur (problème pouvant être lié à celui d'un affouillement).

L'étude présentée ici, est celle du flambement eulérien de telles structures idéalisées à l'extrême:

- le pieu est considéré comme une poutre d'inertie constante immergée, de sa pointe jusqu'à une cote qui peut être prise quelconque, dans un milieu dont l'effet vis-à-vis des déplacements latéraux de la poutre est équivalent à celui d'une infinité d'appuis élastiques de raideur constante; la fraction de poutre extérieure à ce milieu est supposée libre (extrémités mises à part);

- la modélisation adoptée ne prend pas en compte de dissipation de l'effort normal le long de la partie immergée du pieu par frottement latéral (eu égard aux caractéristiques mécaniques supposées moyennes du sol dans lequel est enterré partiellement le pieu) et c'est l'horizon sur lequel s'appuie le pieu en pointe qui est censé exercer intégralement l'effort normal opposé à celui qui s'exerce en tête;

- les cas où le pieu est libre de se déplacer latéralement en pointe n'ont pas été envisagés parce qu'ils sont incompatibles avec l'hypothèse précédente et qu'il est très improbable qu'un pieu flottant puisse périr par flambement.

Etant donné la nature du problème à résoudre il a été possible de présenter les résultats sous forme d'abaques aux paramètres adimensionnels. Sur ces représentations graphiques, on observera sans peine que l'on retrouve dans des cas limites des résultats déjà connus, à savoir :

- lorsque toute réaction élastique a disparu autour du pieu de la part du milieu environnant, ou au contraire lorsque cette réaction se caractérise par une raideur infinie, on retrouve les valeurs classiques des forces critiques d'EULER ;

- lorsque l'intégralité du pieu est immergée dans un milieu offrant une réaction élastique pure, on retrouve les résultats décrits par M. MANDEL dans un article des Annales des Ponts et Chaussées, et qui constitue la référence théorique à laquelle il est jusqu'ici fait le plus unanimement recours (Flambage au sein d'un milieu élastique - Annales des Ponts et Chaussées 1936 2ème semestre pp. 295 - 335).

C'est d'ailleurs la raison pour laquelle il est utile d'insister sur le fait que les résultats présentés ici demandent autant de prudence dans leur exploitation que les résultats des dites théories l'exigeaient puisqu'ils n'en sont en fait qu'une extension à un champ de cas de figure plus vaste. Ils appellent donc les mêmes commentaires sur l'importance de l'influence des conditions aux extrémités et notamment en tête.

On s'aperçoit en effet que si la condition en pointe est, dans la plupart des cas, "masquée" par la présence de l'horizon élastique, il n'en va pas de même pour la condition en tête qui a une très grande influence sur la valeur de l'effort critique de flambement, dès lors qu'il y a dégarnissage. C'est la raison pour laquelle quatre configurations distinctes ont été envisagées en tête de façon à couvrir le mieux possible les cas susceptibles de se présenter dans la réalité. La définition de ces quatre configurations-types résulte du croisement deux à deux des modalités les plus extrêmes (liberté ou bien blocage totaux) qui peuvent caractériser le déplacement horizontal du pieu en tête d'une part, et sa rotation en tête d'autre part. On veillera particulièrement à retenir la modalité la plus adaptée à chaque cas traité: le blocage total vis-à-vis des déplacements horizontaux en tête notamment n'est à envisager que dans les cas où la structure portée est effectivement bloquée (solidarisation à un point fixe, pieux inclinés, etc.), quant au blocage vis-à-vis de la rotation en tête, il n'est à envisager que lorsque les dispositions constructives adoptées sont de nature à assurer effectivement un encastrement parfait (recouvrements suffisants d'armatures, connecteurs, frettes, etc.) dans une zone de la structure portée qui ne soit pas susceptible de tourner.

En tout état de cause, il n'est pas dans l'objet de la présente étude de statuer sur le problème de la sécurité vis-à-vis du flambement de telles structures. Ce n'est que de la confrontation de ces résultats théoriques avec des essais réels que pourra être constituée une doctrine dans ce domaine. Cependant, dans le cas par exemple d'un micropieu constitué d'un tube métallique, le minimum qui puisse être requis au titre de la sécurité est contenu dans les prescriptions de l'Article 61 du CCTG, en négligeant la participation des coulis ou mortiers mis en oeuvre à l'intérieur ou à l'extérieur du tube, comme le préconise l'article 7,24 du DTU 13-2, (sous réserve bien sûr que l'évaluation des actions et des sollicitations qui en découlent, se situe dans le même cadre réglementaire). L'attention est attirée sur le fait qu'il s'agit d'un minimum de prescriptions puisque rien n'est requis au titre des aléas de la participation du sol à la résistance au flambement.

2 - MISE EN EQUATIONS

On appelle milieu I, un milieu laissant totalement libre une poutre dont l'élasticité est caractérisée par son produit EI (E module d'Young, I inertie de la poutre) et qui est soumise à un effort normal N.

On appelle milieu II, un milieu opposant à une poutre du même type que la précédente, une réaction latérale proportionnelle à un déplacement perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre. La "raideur" de cette réaction est notée K (égale dans le cas d'un sol au produit d'un module de réaction k par le maître-couple par unité de longueur de la poutre noté ϕ : $K = k \phi$).

On considère une poutre traversant successivement les milieux I et II avec des conditions à ses extrémités qui sont pour l'instant quelconques. (on aura, dans la suite de cette étude, indifféremment recours au vocable "poutre" ou "pieu" pour la désigner).

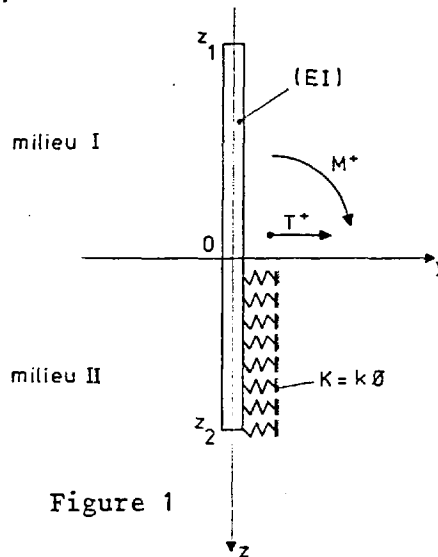


Figure 1

2.1 - Equations spécifiques au milieu II

On écrit l'équilibre d'un tronçon de longueur dz de la poutre dans le milieu II.

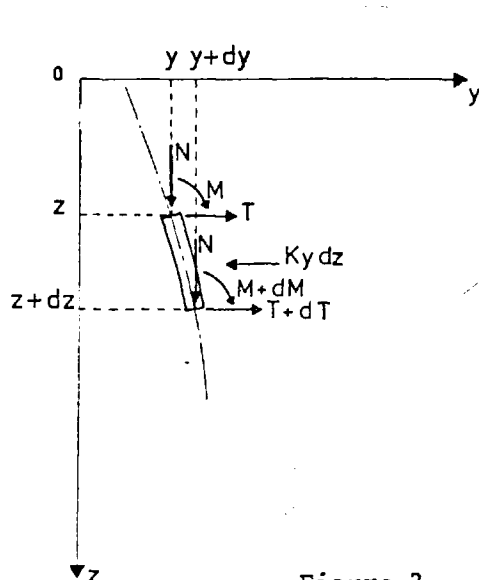


Figure 2

L'équilibre des moments permet d'écrire en $z + dz$

$$dM = - Ndy + T dz - Ky \frac{dz^2}{2}$$

soit en s'arrêtant au 1er ordre:

$$\underline{dM = - Ndy + Tdz}$$

L'équilibre des efforts projetés sur l'horizontale permet d'écrire:

$$\underline{dT = - Kydz}$$

En combinant ces deux relations, on obtient:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -N \frac{d^2 y}{dz^2} - Ky$$

La théorie de l'élasticité permet d'écrire:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dz^2}$$

D'où il vient:

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + N \frac{d^2 y}{dz^2} + Ky = 0$$

On pose $\alpha^2 = \frac{N}{\sqrt{EIK}}$ et on effectue le changement de variable $Z = z \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$

L'équation devient alors:

$$\frac{d^4 y}{dZ^4} + \alpha^2 \frac{d^2 y}{dZ^2} + y = 0 \text{ soit, en notant } \frac{d^n f(Z)}{dZ^n} = f^{(n)}(Z):$$

$$y^{(4)} + \alpha^2 y^{(2)} + y = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle homogène, est

$$r^4 + \alpha^2 r^2 + 1 = 0$$

On appelle r_1, r_2, r_3, r_4 les racines complexes de cette équation dont la solution a la forme générale suivante:

$$y_{II}(Z) = \sum_{i=1}^{i=4} C_i e^{r_i Z} \text{ où } C_i \text{ est un nombre complexe.}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est: $\Delta = \alpha^4 - 4$
Cependant quelque soit le signe de celui-ci, on verra dans la suite qu'on peut mettre la solution sous la forme:

$$y_{II}(Z) = A_{II} f_1(Z) + B_{II} f_2(Z) + C_{II} f_3(Z) + D_{II} f_4(Z)$$

où $A_{II}, B_{II}, C_{II}, D_{II}$ sont des constantes réelles et $f_i(Z)$ une fonction réelle de Z contenant α comme paramètre.

Les conditions aux limites en pointe peuvent s'écrire (en notant $Z_2 = z_2 \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$):

- selon que la pointe est articulée:

$$\left| \begin{array}{l} y_{II}(Z_2) = 0 \\ M(Z_2) = 0 \text{ (i.e.: } y_{II}^{(2)}(Z_2) = 0) \end{array} \right.$$

- selon que la pointe est encastrée:

$$\begin{cases} y_{II} (Z_2) = 0 \\ y_{II}^{(1)} (Z_2) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit dans tous les cas au système de deux équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 0 = A_{II} M_1 + B_{II} M_2 + C_{II} M_3 + D_{II} M_4 \\ 0 = A_{II} N_1 + B_{II} N_2 + C_{II} N_3 + D_{II} N_4 \end{cases}$$

où quelque soit i $M_i = f_i (Z_2)$ et $N_i = f_i^{(1)} (Z_2)$ lorsque la pointe est encastré
 $N_i = f_i^{(2)} (Z_2)$ lorsque la pointe est articulé

Pour déterminer les fonctions $f_i(Z)$ il faut à présent distinguer deux cas:

2.1.1 - $\alpha^2 < 2$

Les quatre racines complexes de l'équation caractéristique sont:

$$r_1 = e^{i\theta}, \quad r_2 = -e^{i\theta}, \quad r_3 = e^{-i\theta}, \quad r_4 = -e^{-i\theta}$$

avec $\cos \theta = \frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2+\alpha^2}}{2}$

En posant $X = Z \cos \theta$ et $y = Z \sin \theta$, la forme générale de la solution devient:

$$y_{II} = C_1 e^X e^{iY} + C_2 e^{-X} e^{-iY} + C_3 e^X e^{-iY} + C_4 e^{-X} e^{iY}$$

La partie réelle de cette solution est:

$$y_{II} = A_{II} \operatorname{ch} X \sin Y + B_{II} \operatorname{sh} X \cos Y + C_{II} \operatorname{sh} X \sin Y + D_{II} \operatorname{ch} X \cos Y$$

On peut donc écrire en identifiant:

$$\begin{aligned} f_1 (Z) &= \operatorname{ch} (Z \cos \theta) \sin (Z \sin \theta) \\ f_2 (Z) &= \operatorname{sh} (Z \cos \theta) \cos (Z \sin \theta) \\ f_3 (Z) &= \operatorname{sh} (Z \cos \theta) \sin (Z \sin \theta) \\ f_4 (Z) &= \operatorname{ch} (Z \cos \theta) \cos (Z \sin \theta) \end{aligned}$$

On peut encore remarquer que:

$$\begin{array}{l} f_1^{(1)}(Z) = \cos\theta f_3(Z) + \sin\theta f_4(Z) \\ f_2^{(1)}(Z) = \cos\theta f_4(Z) - \sin\theta f_3(Z) \\ f_3^{(1)}(Z) = \cos\theta f_1(Z) + \sin\theta f_2(Z) \\ f_4^{(1)}(Z) = \cos\theta f_2(Z) - \sin\theta f_1(Z) \end{array} \quad \begin{array}{l} f_1^{(2)}(Z) = \cos 2\theta f_1(Z) + \sin 2\theta f_2(Z) \\ f_2^{(2)}(Z) = \cos 2\theta f_2(Z) - \sin 2\theta f_1(Z) \\ f_3^{(2)}(Z) = \cos 2\theta f_3(Z) + \sin 2\theta f_4(Z) \\ f_4^{(2)}(Z) = \cos 2\theta f_4(Z) - \sin 2\theta f_3(Z) \end{array} \quad \begin{array}{l} f_1^{(3)}(Z) = \cos 3\theta f_3(Z) + \sin 3\theta f_4(Z) \\ f_2^{(3)}(Z) = \cos 3\theta f_4(Z) - \sin 3\theta f_3(Z) \\ f_3^{(3)}(Z) = \cos 3\theta f_1(Z) + \sin 3\theta f_2(Z) \\ f_4^{(3)}(Z) = \cos 3\theta f_2(Z) - \sin 3\theta f_1(Z) \end{array}$$

2.1.2 - $\alpha^2 > 2$

Notons $R = r^2$, l'équation caractéristique admet alors en R deux racines:

$$R_1 = \frac{-\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 4}}{2}$$

Notons encore $a^2 = \frac{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 4}}{2}$ les racines r_i de l'équation caractéristique sont alors :

$$r_1 = ai, \quad r_2 = -ai, \quad r_3 = \frac{1}{a}i, \quad r_4 = -\frac{1}{a}i$$

On en déduit la forme de la solution générale cherchée:

$$y_{II} = A_{II} \cos\left(\frac{Z}{a}\right) + B_{II} \sin\left(\frac{Z}{a}\right) + C_{II} \sin(aZ) + D_{II} \cos(aZ)$$

Soit, en procédant par identification:

$$f_1(Z) = \cos\left(\frac{Z}{a}\right)$$

$$f_2(Z) = \sin\left(\frac{Z}{a}\right)$$

$$f_3(Z) = \sin(aZ)$$

$$f_4(Z) = \cos(aZ)$$

On peut encore remarquer:

$$\begin{array}{l} f_1^{(1)}(Z) = -\frac{1}{a}f_2(Z) \\ f_2^{(1)}(Z) = \frac{1}{a}f_1(Z) \\ f_3^{(1)}(Z) = af_4(Z) \\ f_4^{(1)}(Z) = -af_3(Z) \end{array} \quad \begin{array}{l} f_1^{(2)}(Z) = -\frac{1}{a^2}f_1(Z) \\ f_2^{(2)}(Z) = -\frac{1}{a^2}f_2(Z) \\ f_3^{(2)}(Z) = -a^2 f_3(Z) \\ f_4^{(2)}(Z) = -a^2 f_4(Z) \end{array} \quad \begin{array}{l} f_1^{(3)}(Z) = \frac{1}{a^3}f_2(Z) \\ f_2^{(3)}(Z) = -\frac{1}{a^3}f_1(Z) \\ f_3^{(3)}(Z) = -a^3 f_4(Z) \\ f_4^{(3)}(Z) = a^3 f_3(Z) \end{array}$$

2.2 - Equations spécifiques au milieu I

Dans le milieu I les équations d'équilibre jointes à celle de l'élasticité donnent:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dz^2} = - N(y-y_1) + T_1(z-z_1) + M_1$$

où y_1 , T_1 , M_1 sont respectivement les déplacement, effort tranchant et moment fléchissant en $z = z_1$.

On opère le même changement de variable que précédemment soit:

$$Z = z \sqrt[4]{\frac{K}{EI}} \quad (\text{on note en particulier } Z_1 = z_1 \sqrt[4]{\frac{K}{EI}})$$

La solution de l'équation différentielle peut être mise sous la forme:

$$y_I = \underbrace{A_I \cos(\alpha Z) + B_I \sin(\alpha Z)}_{\text{solution générale de l'équation sans second membre}} + \underbrace{C_I Z + D_I}_{\text{solution particulière}}$$

Suivant les conditions en tête on dispose des équations supplémentaires suivantes (au nombre de 2):

- cas de la tête libre:

$$\left. \begin{array}{l} M(z_1) = 0 \\ T(z_1) = -\frac{Ndy}{dz} \end{array} \right\} \text{soit : } \left\{ \begin{array}{l} y_I^{(2)}(Z_1) = 0 \\ EI \frac{d^3 y_I}{dz^3} = -N \frac{dy_I}{dz} \text{ ; } y_I^{(3)}(Z_1) = -\alpha^2 y_I^{(1)}(Z_1) \end{array} \right.$$

effort tranchant dû à la rotation de la poutre en tête

D'où:
$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha^2 \cos(\alpha Z_1) A_I - \alpha^2 \sin(\alpha Z_1) B_I = 0 \\ \alpha^3 \sin(\alpha Z_1) A_I - \alpha^3 \cos(\alpha Z_1) B_I = -\alpha^2 \left[-\alpha \sin(\alpha Z_1) A_I + \alpha \cos(\alpha Z_1) B_I + C_I \right] \end{array} \right.$$

Cette dernière équation peut être mise sous la forme : $C_I = 0$

- cas de la tête libre de se déplacer mais empêchée de tourner:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_I^{(1)}(Z_1) = 0 \\ y_I^{(3)}(Z_1) = -\alpha^2 y_I^{(1)}(Z_1) \end{array} \right\} \text{d'où : } \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\alpha Z_1) A_I + \cos(\alpha Z_1) B_I = 0 \\ C_I = 0 \end{array} \right.$$

- cas de l'articulation en tête:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_I(Z_1) = 0 \\ y_I^{(2)}(Z_1) = 0 \end{array} \right\} \text{d'où : } \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha Z_1) A_I + \sin(\alpha Z_1) B_I + C_I Z_1 + D_I = 0 \\ -\alpha^2 \cos(\alpha Z_1) A_I - \alpha^2 \sin(\alpha Z_1) B_I = 0 \end{array} \right.$$

- cas de l'encastrement en tête :

$$\left. \begin{array}{l} y_I(z_1) = 0 \\ y_I^{(1)}(z_1) = 0 \end{array} \right\} \text{d'où :} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha z_1) A_I + \sin(\alpha z_1) B_I + C_I z_1 + D_I = 0 \\ -\alpha \sin(\alpha z_1) A_I + \alpha \cos(\alpha z_1) B_I + C_I = 0 \end{array} \right.$$

2.3 - Equations à l'interface des milieux I et II

Les conditions de continuité en $z = 0$ permettent de compléter le système d'équations linéaires dont on a besoin pour trouver les 8 constantes avec lesquelles sont exprimées y_I et y_{II} . On dispose déjà de 4 équations il reste donc à écrire les 4 équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_I(0) = y_{II}(0) \\ y_I^{(1)}(0) = y_{II}^{(1)}(0) \\ y_I^{(2)}(0) = y_{II}^{(2)}(0) \\ y_I^{(3)}(0) = y_{II}^{(3)}(0) \end{array} \right.$$

D'après ce qui a été vu précédemment elles se traduisent par le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_I + 0 + 0 - D_I + f_1(0)A_{II} + f_2(0)B_{II} + f_3(0)C_{II} + f_4(0)D_{II} = 0 \\ 0 - \alpha B_I - C_I + 0 + f_1^{(1)}(0)A_{II} + f_2^{(1)}(0)B_{II} + f_3^{(1)}(0)C_{II} + f_4^{(1)}(0)D_{II} = 0 \\ \alpha^2 A_I + 0 + 0 + 0 + f_1^{(2)}(0)A_{II} + f_2^{(2)}(0)B_{II} + f_3^{(2)}(0)C_{II} + f_4^{(2)}(0)D_{II} = 0 \\ 0 + \alpha^3 B_I + 0 + 0 + f_1^{(3)}(0)A_{II} + f_2^{(3)}(0)B_{II} + f_3^{(3)}(0)C_{II} + f_4^{(3)}(0)D_{II} = 0 \end{array} \right.$$

2.4 - Résolution complète du problème

On a donc intégralement constitué le système de 8 équations à 8 inconnues qui permet de déterminer la déformée du pieu en chacun des points de celui-ci; cette déformée existe, est unique (et est identiquement nulle) à la seule condition que le déterminant soit non nul (le système étant homogène). Or le phénomène de flambement apparaît précisément pour la plus petite valeur de l'effort normal N en tête qui annule le déterminant (dès lors que tous les autres paramètres ont été fixés). Cette valeur notée N_c est appelée force critique de flambement eulérien (loi de comportement élastique des matériaux).

Le problème de la recherche du flambement se résume donc à celui de l'annulation d'un déterminant par la plus petite valeur possible du paramètre qui a été appelé plus haut α .

Le déterminant peut s'écrire, d'après ce qui précède:

$$D = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ 0 & -\alpha & -1 & 0 & f_1^{(1)}(0) & f_2^{(1)}(0) & f_3^{(1)}(0) & f_4^{(1)}(0) \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & f_1^{(2)}(0) & f_2^{(2)}(0) & f_3^{(2)}(0) & f_4^{(2)}(0) \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 & f_1^{(3)}(0) & f_2^{(3)}(0) & f_3^{(3)}(0) & f_4^{(3)}(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$$

avec les valeurs suivantes des paramètres m_i et n_i en fonction des conditions en tête:

Condition en tête	m_1	m_2	m_3	m_4	n_1	n_2	n_3	n_4
liberté totale	$\cos(\alpha Z_1)$	$\sin(\alpha Z_1)$	0	0	0	0	1	0
déplacement horizontal libre-rotation bloquée	$-\sin(\alpha Z_1)$	$\cos(\alpha Z_1)$	0	0	0	0	1	0
articulation parfaite	$\cos(\alpha Z_1)$	$\sin(\alpha Z_1)$	Z_1	1	$\cos(\alpha Z_1)$	$\sin(\alpha Z_1)$	0	0
encastrement parfait	$\cos(\alpha Z_1)$	$\sin(\alpha Z_1)$	Z_1	1	$-\sin(\alpha Z_1)$	$\alpha \cos(\alpha Z_1)$	1	0

TABLEAU 1

On convient alors de noter:

$$\Delta \left[\begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \end{array} \right] = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & f_1^{(1)}(0) & f_2^{(1)}(0) & f_3^{(1)}(0) & f_4^{(1)}(0) \\ \alpha^2 & 0 & f_1^{(2)}(0) & f_2^{(2)}(0) & f_3^{(2)}(0) & f_4^{(2)}(0) \\ 0 & \alpha^3 & f_1^{(3)}(0) & f_2^{(3)}(0) & f_3^{(3)}(0) & f_4^{(3)}(0) \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' \left[\begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \end{array} \right] = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ \alpha^2 & 0 & f_1^{(2)}(0) & f_2^{(2)}(0) & f_3^{(2)}(0) & f_4^{(2)}(0) \\ 0 & \alpha^3 & f_1^{(3)}(0) & f_2^{(3)}(0) & f_3^{(3)}(0) & f_4^{(3)}(0) \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$$

$$W = -m_4 n_3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ 0 & -\alpha & f_1(1)(0) & f_2(1)(0) & f_3(1)(0) & f_4(1)(0) \\ \alpha^2 & 0 & f_1(2)(0) & f_2(2)(0) & f_3(2)(0) & f_4(2)(0) \\ 0 & \alpha^3 & f_1(3)(0) & f_2(3)(0) & f_3(3)(0) & f_4(3)(0) \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{f}_1(2)(0) & f_2(2)(0) & f_3(2)(0) & f_4(2)(0) \\ f_1(3)(0) & f_2(3)(0) & f_3(3)(0) & f_4(3)(0) \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$$

On trouve facilement, en remarquant que n_4 est nul dans tous les cas (cf tableau 1) et en développant D par rapport à sa 4ème colonne puis par rapport à la 3ème colonne des déterminants 7x7 ainsi obtenus, l'expression suivante de D en fonction de Δ , Δ' et W :

$$D = \Delta \left[\bar{a} = m_3 n_1 - n_3 m_1, \bar{b} = m_3 n_2 - n_3 m_2 \right] + m_4 \Delta' \left[\bar{a} = n_1, \bar{b} = n_2 \right] + W$$

Il est à remarquer que W est non nul dans le seul cas où la tête est encastrée parfaitement.

Le calcul de D sera achevé lorsqu'on aura évalué les quantités

$$\Delta \left[\bar{a} = 1, \bar{b} = 0 \right], \Delta \left[\bar{a} = 0, \bar{b} = 1 \right], \Delta' \left[\bar{a} = 1, \bar{b} = 0 \right], \Delta' \left[\bar{a} = 0, \bar{b} = 1 \right] \text{ et } W$$

dans tous les cas susceptibles de se présenter. Ces évaluations donnent lieu à des calculs très simples mais fastidieux qui ne seront pas rapportés ici. Les résultats obtenus sont rassemblés dans les tableaux 2 et 3 ci-après :

Tableau 2(*) $\alpha < \sqrt{2}$	POINTE ARTICULEE	POINTE ENCASTREE
$\Delta [\bar{a} = 1, \bar{b} = 0]$	$\alpha \sin 2\theta (\cos 3\theta \cos Y \sin Y + \sin 3\theta \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X)$	$\frac{\alpha}{2} [1 + \cos 2\theta (\operatorname{ch}^2 X - \cos^2 Y) - \cos 4\theta (\operatorname{ch}^2 X - \sin^2 Y)]$
$\Delta [\bar{a} = 0, \bar{b} = 1]$	$\alpha^2 \sin^2 2\theta (\operatorname{ch}^2 X - \sin^2 Y)$	$\alpha^2 \sin 2\theta (\cos \theta \cos Y \sin Y + \sin \theta \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X)$
$\Delta' [\bar{a} = 1, \bar{b} = 0]$	$\alpha^3 \sin^2 2\theta (\operatorname{ch}^2 X - \cos^2 Y)$	$\alpha^3 \sin 2\theta (\sin \theta \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X - \cos \theta \cos Y \sin Y)$
$\Delta' [\bar{a} = 0, \bar{b} = 1]$	$\sin 2\theta (-\cos 5\theta \cos Y \sin Y + \sin 5\theta \operatorname{ch} X \operatorname{sh} X)$	$\frac{1}{2} [-1 + \cos 4\theta (\operatorname{ch}^2 X - \sin^2 Y) + \cos 6\theta (\cos^2 Y - \operatorname{ch}^2 X)]$
W (tête encastrée)	$2\alpha \sin 2\theta (\sin \theta \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X - \cos \theta \cos Y \sin Y)$	$2\alpha (-\cos^2 2\theta + \cos^2 \theta \cos^2 Y + \sin^2 \theta \operatorname{ch}^2 X)$

Tableau 3(**) $\alpha > \sqrt{2}$	POINTE ARTICULEE	POINTE ENCASTREE
$\Delta [\bar{a} = 1, \bar{b} = 0]$	$\alpha \sqrt{\alpha^4 - 4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 - \alpha^3 \cos \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 \right)$	$\alpha [-2 + (\alpha^4 - 2) \cos \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 + \alpha^2 \sin \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2]$
$\Delta [\bar{a} = 0, \bar{b} = 1]$	$\alpha^2 (\alpha^4 - 4) \cos \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2$	$\alpha^2 \sqrt{\alpha^4 - 4} \left(\alpha \cos \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 - \frac{1}{2} \sin \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 \right)$
$\Delta' [\bar{a} = 1, \bar{b} = 0]$	$\alpha^3 (\alpha^4 - 4) \sin \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2$	$\alpha^3 \sqrt{\alpha^4 - 4} \left(-\alpha \sin \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 + \frac{1}{2} \cos \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 \right)$
$\Delta' [\bar{a} = 0, \bar{b} = 1]$	$\sqrt{\alpha^4 - 4} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 - \alpha^5 \sin \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 \right)$	$2 - (\alpha^4 - 2) \cos \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 - \alpha^2 (\alpha^4 - 3) \sin \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2$
W (tête encastrée)	$2\alpha \sqrt{\alpha^4 - 4} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 - \alpha \sin \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 \right]$	$2\alpha \left[\alpha^4 - 2 - \alpha^2 \sin \frac{Z_2}{2} \sin \alpha Z_2 - 2 \cos \frac{Z_2}{2} \cos \alpha Z_2 \right]$

(*) Il est rappelé que $\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2 - \alpha^2} / 2 \\ \sin \theta = \sqrt{2 + \alpha^2} / 2 \end{cases}$, $\begin{cases} X = Z_2 \cos \theta \\ Y = Z_2 \sin \theta \end{cases}$ et que l'on peut faire les remarques

suivantes: $\begin{cases} \cos 2\theta = -\alpha^2 / 2 \\ \sin 2\theta = \sqrt{4 - \alpha^4} / 4 \end{cases}$, $\begin{cases} \cos 3\theta = -(1 + \alpha^2) \cos \theta \\ \sin 3\theta = (1 - \alpha^2) \sin \theta \end{cases}$, $\cos 4\theta = \alpha^4 / 2 - 1$, $\begin{cases} \cos 5\theta = -\alpha^2 \cos 3\theta - \cos \theta \\ \sin 5\theta = -\alpha^2 \sin 3\theta - \sin \theta \end{cases}$,
 $\cos 6\theta = \alpha^2 (3 - \alpha^4) / 2$

(**) Il est rappelé que $a^2 = \frac{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 4}}{2}$

Deux cas peuvent alors se présenter:

- 1er cas: le déterminant a l'allure suivante:

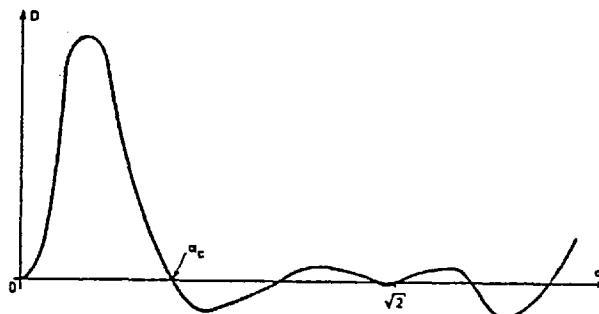


Figure 3

dans ce cas la valeur cherchée est très évidemment celle notée α_c

- 2ème cas: le déterminant a l'allure suivante:

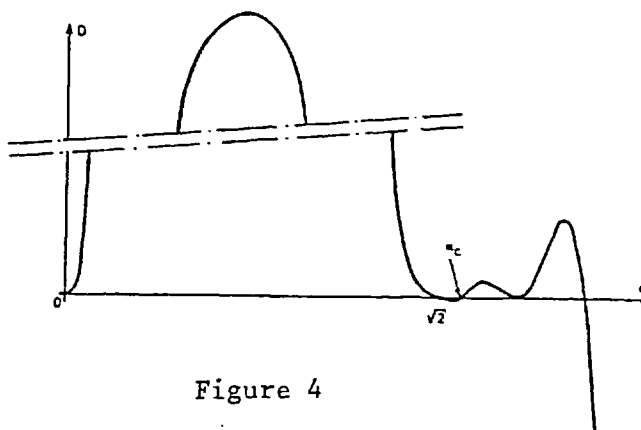


Figure 4

dans ce cas, il faut éliminer en général la valeur particulière $\alpha = \sqrt{2}$, et ne considérer que la valeur suivante qui annule D, soit : α_c (le cas(*) où $\alpha_c = \sqrt{2}$ est très aisé à isoler par tâtonnements).

A ce stade, on peut considérer le problème comme entièrement résolu; il reste à présenter la mise en forme des résultats qui a été retenue.

3 - PRESENTATION DES ABAQUES ET DE LEUR UTILISATION

3.1 - Généralités

La formulation adimensionnelle du problème telle qu'on vient d'en donner un aperçu a permis de présenter des abaques sur lesquels peuvent être traités un très grand nombre de cas réels. Ces abaques sont au nombre de 8 puisqu'il s'agissait de croiser 2 conditions distinctes en pointe avec 4 conditions distinctes elles aussi en tête.

(*) ainsi qu'on peut le constater au §2, les calculs effectués jusqu'ici ne concernent que les cas $\alpha > \sqrt{2}$ et $\alpha < \sqrt{2}$; lorsqu'on étudie le cas $\alpha = \sqrt{2}$, l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle écrite en 2.1 n'admet plus que deux racines distinctes, et la résolution complète du problème conduit à l'étude d'un nouveau déterminant qui n'est pas toujours nul, comme pourrait le laisser penser un hatif passage à la limite sur les expressions des tableaux 2 et 3.

Il est ici nécessaire d'introduire les notations supplémentaires suivantes:

$$h = z_2 - z_1 \text{ (hauteur totale de la poutre ou du pieu)}$$

$$\omega = \frac{-z_1}{h}$$

$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$

On remarque qu'à la donnée d'un jeu quelconque de trois valeurs des paramètres h , ω et m correspond, par le processus qui a été décrit aux § 2.1 à 2.4 (d'autres processus seraient toutefois envisageables), une et une seule valeur du paramètre α_c à partir duquel il est possible de "remonter" à la force critique de flambement par la relation:

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{h^2} [\alpha_c m]^2$$

C'est la raison pour laquelle il est possible de représenter graphiquement en deux dimensions, dans un diagramme présentant ω en abscisse et $N_c h^2 / \pi^2 EI$ en ordonnée, le lieu des points caractérisés par une même valeur quelconque du paramètre m . Il est notamment intéressant de constater que, toutes conditions en tête et en pointe confondues, l'allure générale des trois lieux m nul, m pris égal à une constante finie non nulle notée m_0 , et m infini est celle représentée à la figure 5.

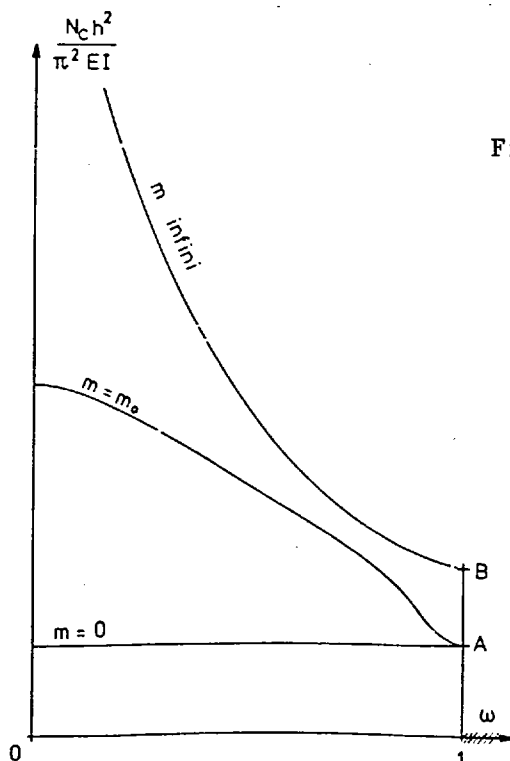


Figure 5

Les huit abaquages proposés ne sont rien d'autre que la transposition en échelle semi-logarithmique (la direction logarithmique étant celle des ordonnées) de l'abaque-type de la figure 5 pour chacune des huit configurations envisagées avec bien sûr un plus grand nombre de valeurs m_0 envisagées du paramètre m . Parmi les renseignements contenus dans la figure 5, certains sont dignes d'être remarqués:

- lieu "m nul": il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, éventuellement confondue avec celui-ci (ceci n'a lieu que dans le cas où la pointe est articulée et la tête est entièrement libre, mais n'apparaît cependant pas sur l'abaque afférent à cette configuration en raison de l'échelle semi-logarithmique); ce lieu où $m = 0$ traduit les cas où K est nul ou bien négligeable devant EI (le cas où h est nul étant sans intérêt), c'est-à-dire que la valeur de la force critique de flambement est celle donnée par EULER (la valeur de l'ordonnée de cette droite lue sur les différents abaquages en atteste);

- lieu "m infini": il s'agit de la fonction $1/\alpha^2$ à un facteur multiplicateur constant près qui diffère selon les configurations aux extrémités. Ce cas correspond notamment à celui où K est infini, et la force critique de flambement est donc celle d'une poutre de longueur ωh encastree à une de ses extrémités et présentant à l'autre extrémité les mêmes conditions que la poutre, initialement étudiée en tête. Dans tous les cas, on constate là encore que les valeurs issues de l'abaque coïncident avec celles prévues par la théorie d'EULER. Le cas où h est infini sans que K le soit n'a besoin d'être signalé que pour mémoire, de même que celui où EI est nul: il s'agit en effet dans l'une comme dans l'autre hypothèse, du cas où, dès lors que ω est non nul, la force critique de flambement est nulle (ce qui peut d'ailleurs être déduit de façon triviale de la lecture des abaquages). Enfin, comme on pouvait s'y attendre les points notés A et B sur la figure 5 ne sont distincts l'un de l'autre que dans les cas où la pointe est articulée.

- lieu "m égal à m_0 ": étant donné le choix qui a été fait des axes ce lieu est évidemment inscrit dans le domaine limité par les deux lieux précédents. Il est systématiquement issu en $\omega = 1$ du point A (dont il est rappelé qu'il est confondu avec B lorsque la pointe est encastree). Pour des valeurs de ω suffisamment éloignées de 0 et de 1, on constate que, pour des valeurs m_0 du paramètre m supérieures à 10, le lieu $m = m_0$ est très voisin du lieu "m infini"; c'est d'ailleurs dans cet intervalle de valeurs de ω (]0 1[) que les renseignements fournis par les abaquages, constituent une contribution vraiment originale. Enfin en $\omega = 0$ (cas du pieu totalement immergé) on retrouve les résultats auxquels était antérieurement parvenu MANDEL (cf § 1): on s'aperçoit en effet que dans toutes les configurations il existe une valeur du paramètre m , au-dessus de laquelle, à toute valeur de m correspond (en $\omega = 0$) une valeur du paramètre $N_c h^2 / \eta^2 EI$ de plus en plus proche de 1 ou 2 fois m^2 , selon les cas de figure, au fur et à mesure que m augmente ;

On peut d'ailleurs dans le cas où $\omega = 0$ avoir à nouveau recours à la représentation qu'avait adoptée MANDEL, à savoir placer en abscisse la longueur réduite (on prendra ici m) et en ordonnée le paramètre $\alpha^2 = N_c / \sqrt{EIK}$; on obtient les diagrammes des figures 6 et 7 respectivement associés au cas de la pointe articulée et de la pointe encastree.

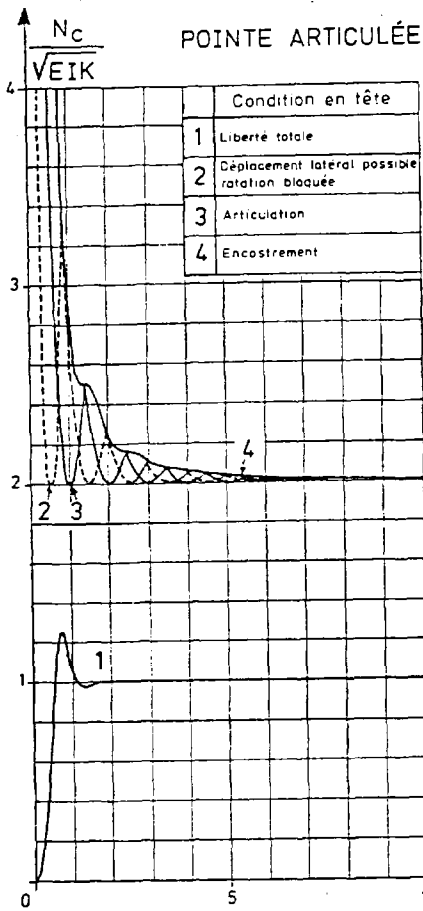


Figure 6

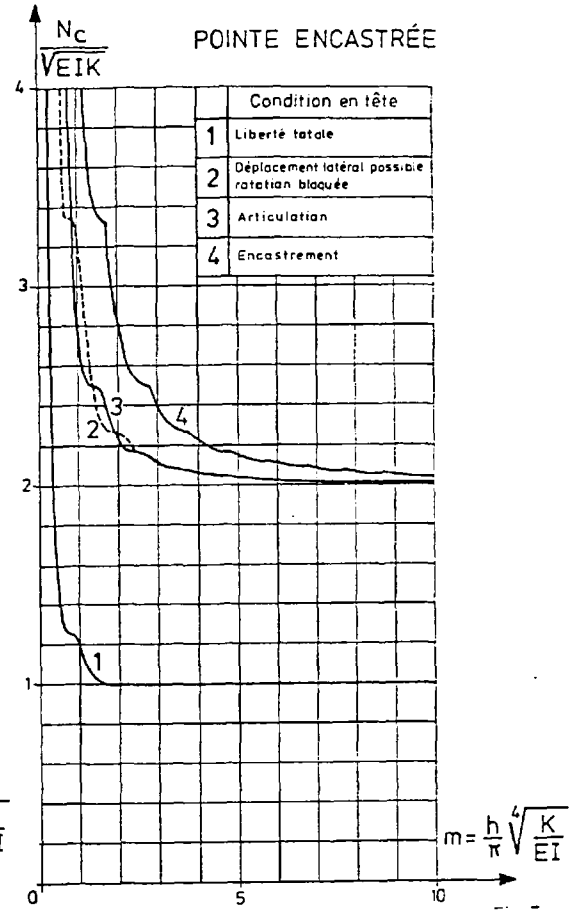


Figure 7

Ces diagrammes ne diffèrent de celui proposé par MANDEL que par les échelles différentes et un plus grand nombre de configurations envisagées.

Remarque: Ainsi que cela a été dit ci-dessus les abaques présentés comportent en ordonnée une échelle logarithmique telle que deux puissances successives de 10 soient espacées de 50 mm; ceci a pour conséquence que, sous réserve que la condition de la lecture de l'abaque ad hoc permette de localiser le point représentatif de la configuration à traiter, avec une incertitude absolue au plus égale à + 0,5 mm (ce qui est relativement aisé à réaliser), alors on peut énoncer que l'incertitude relative sur le paramètre lu $(N_c h^2 / \pi^2 EI)$ est égale à $\pm 2,3\%$ quelle que soit l'amplitude de celui-ci.

3.2 - Exemple d'application

Soit un micropieu constitué d'un tube métallique de 10 cm de rayon extérieur et de 1,25 cm d'épaisseur présentant les caractéristiques suivantes, en section courante:

- inertie $I = 3,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
- Module d'Young de l'acier $E = 2.10^7 \text{ t/m}^2$
- "Maître couple" = 0,20 m.

a) Considérons un tel micropieu libre sur 5,5 m de hauteur, mais immergé dans un sol de module de réaction horizontal $k = 2\ 880\ \text{t/m}^3$ sur une hauteur de 10,1 m. Le micropieu sera supposé encasté en pointe, et libre de se déplacer mais non de tourner en tête ; ces données sont résumées sur la figure 8 ci-contre :

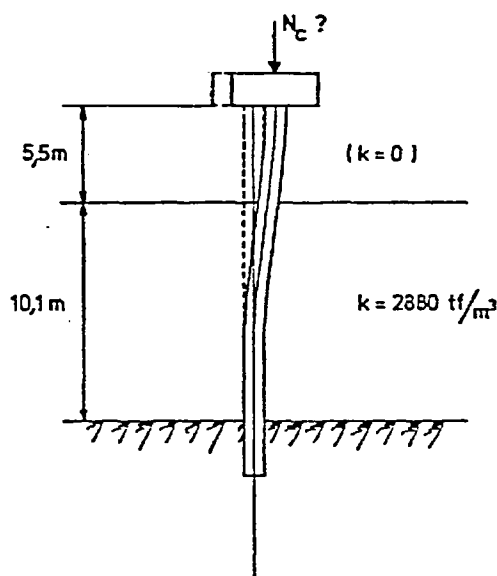


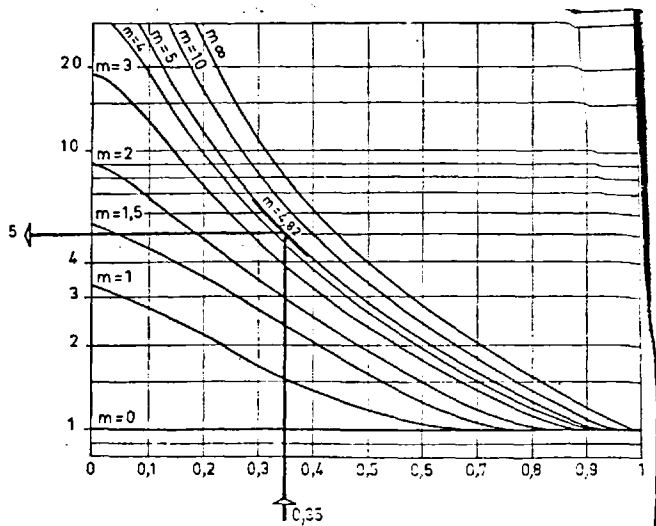
Figure 8

Il faut tout d'abord évaluer les quantités suivantes:

$$\omega = \frac{5,5}{5,5 + 10,1} = 0,35$$

$$m = \frac{5,5 + 10,1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{2\ 880 \times 0,20}{3,25 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^7}} = 4,82$$

On lit sur l'abaque correspondant : $\frac{N_c}{\pi^2 EI} = 5,0$ (voir exemplaire reproduit ci-contre)



avec une incertitude relative de $\pm 2,3\%$

$$\begin{aligned} \text{soit : } N_c &= \frac{5,0 \times \pi^2}{(5,5 + 10,1)^2} \times 2 \times 10^7 \times 3,25 \times 10^{-5} \\ &= 131,8\ \text{t.} \pm 3,0\ \text{t.} \end{aligned}$$

Le calcul exact donne $N_c = 131,484\ \text{t.}$

b) Considérons le même micropieu immergé dans le même sol mais cette fois sur une hauteur de 18,10 m et supposons-le articulé en pointe:

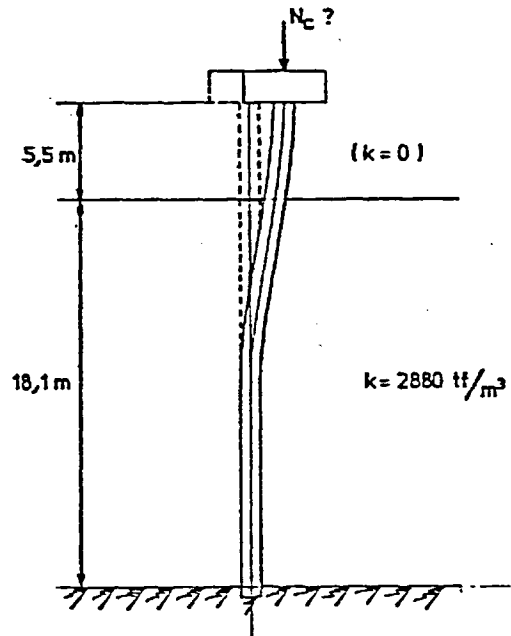


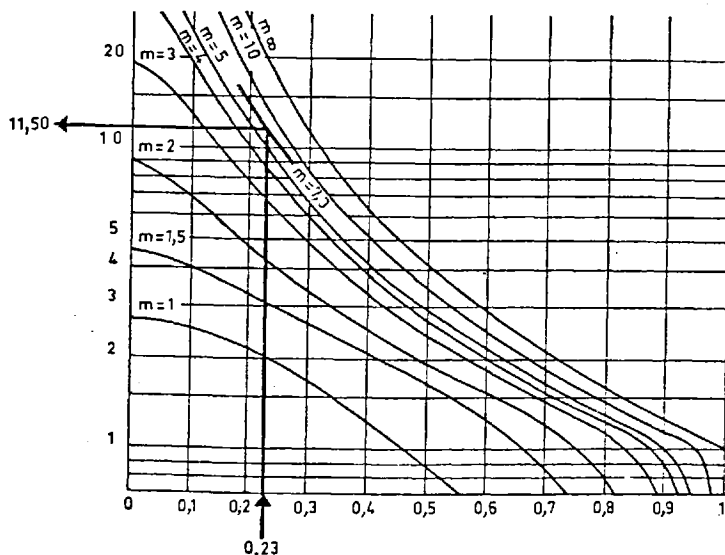
Figure 9

Il s'agit d'évaluer les mêmes paramètres ω et m :

$$\omega = \frac{5,5}{5,5 + 18,1} = 0,23$$

$$m = \frac{18,1 + 5,5}{\pi} \sqrt[4]{\frac{2880 \times 0,20}{3,25 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^7}} = 7,29$$

On trouve sur l'abaque dont un extrait figure ci-contre: $\frac{N_c h^2}{\pi^2 EI} = 11,5$



avec une incertitude de $\pm 2,3\%$

D'où:

$$N_c = \frac{11,5 \times \pi^2}{(5,5 + 18,1)^2} \times 2 \times 10^7 \times 3,25 \times 10^{-5}$$

$$= 132,5 \text{ t} \pm 3 \text{ t}$$

Le calcul exact donne: $N_c = 131,484 \text{ t}$.

Remarque:

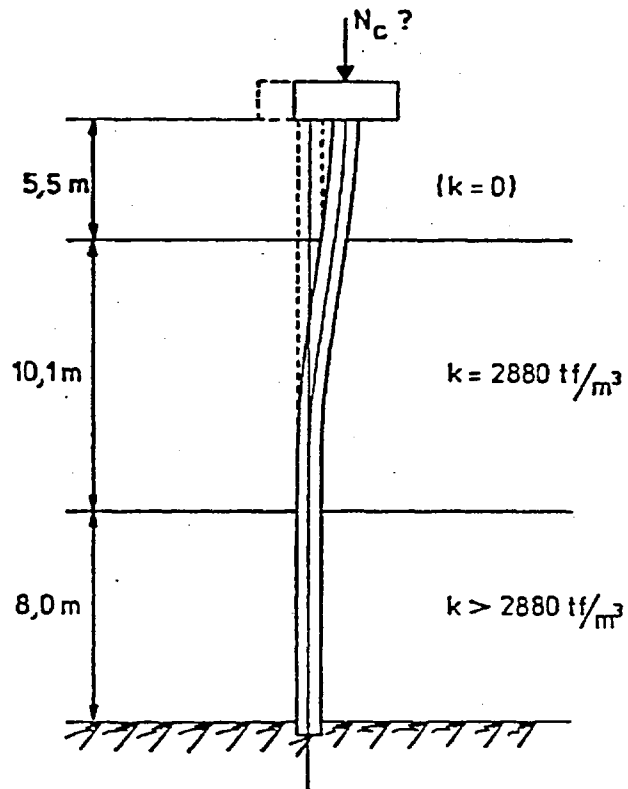


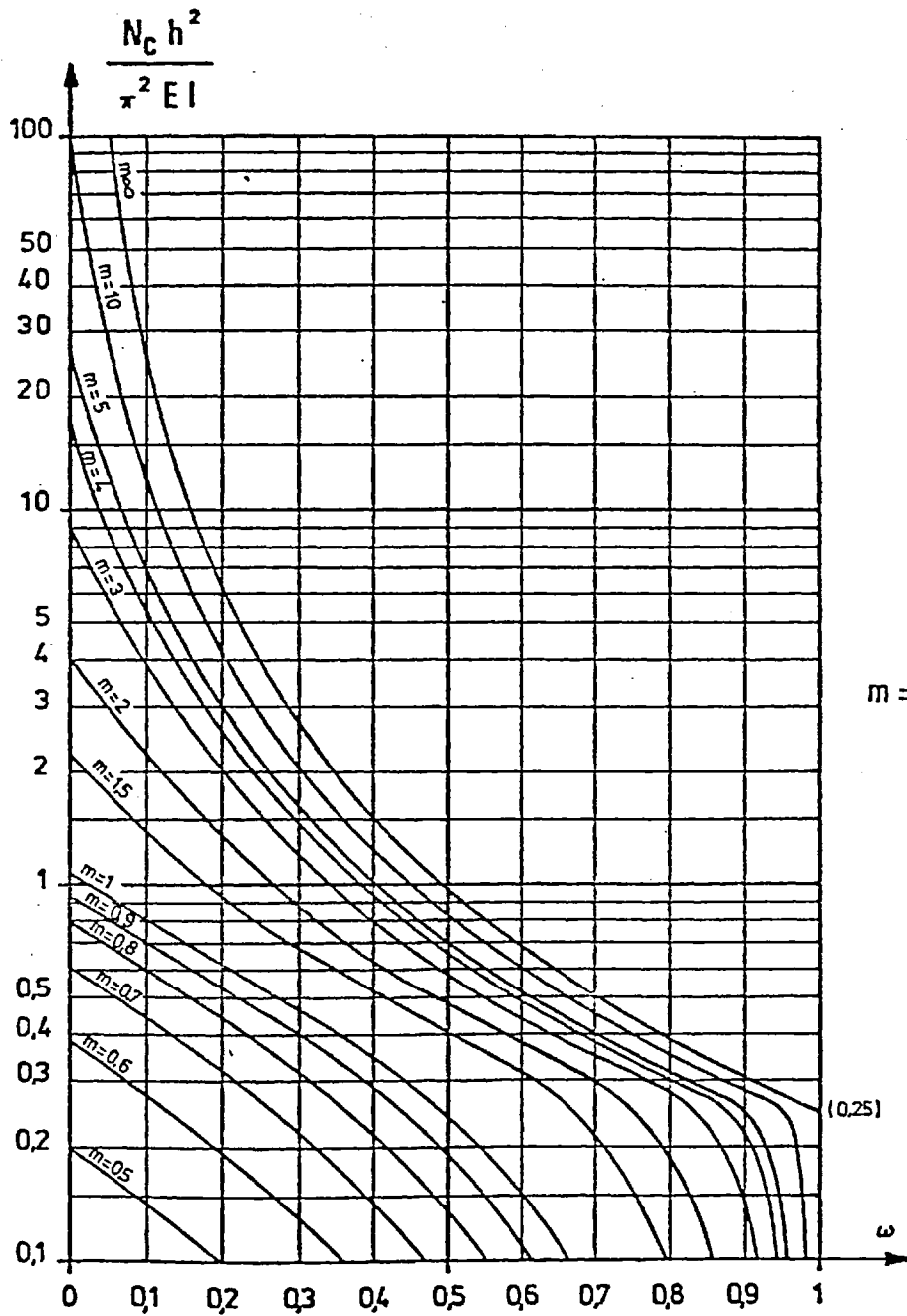
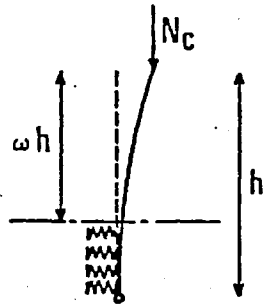
Figure 10

On peut considérer la configuration décrite à la figure 10 comme étant "encadrée" par la configuration étudiée en a) ci-dessus et celle étudiée en b). La différence en valeur absolue entre les valeurs de N_c déduites de la lecture des abaques en a) et b) (voisine de 1 tf) est inférieure au seuil de précision de la lecture (3tf); ceci signifie que les valeurs réelles cherchées (y compris celle relative à la configuration de la figure 10) sont probablement confondues, ce qui est d'ailleurs confirmé par le calcul exact.

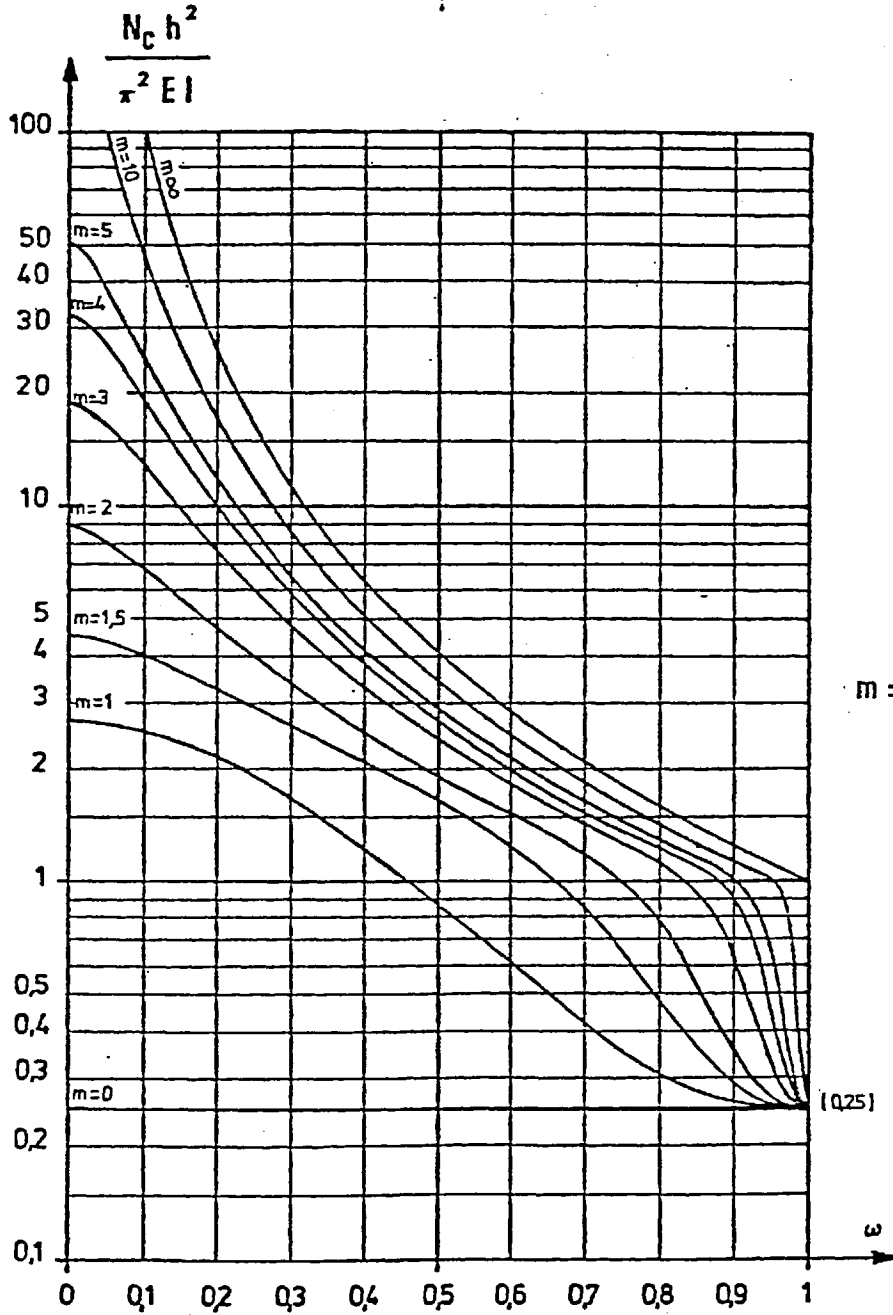
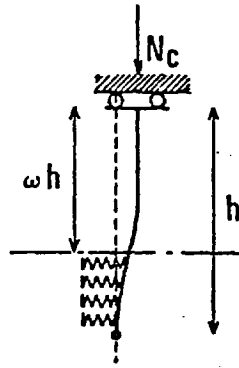
On s'aperçoit donc sur cet exemple que les abaques peuvent être d'une certaine utilité même dans le cas de sols présentant plusieurs couches aux modules de réaction différents.

4. ABAQUES

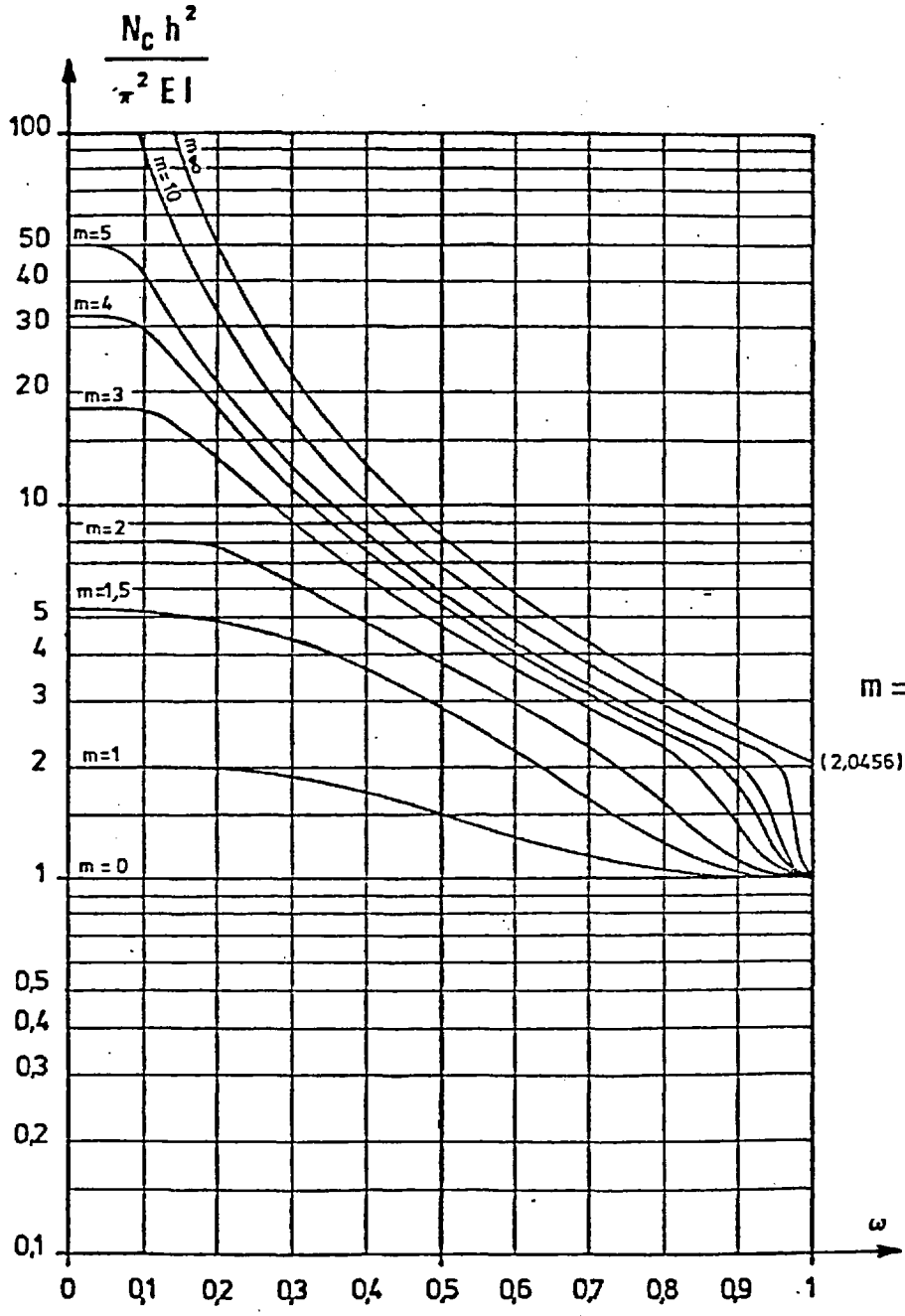
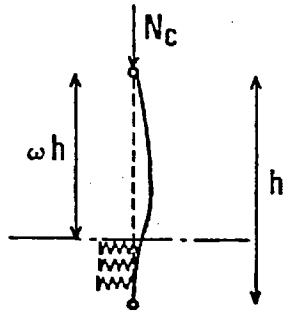
	N° page
4.1 - POINTE ARTICULEE	20
Condition en tête :	
4.1.1 - Liberté totale	20
4.1.2 - Déplacement latéral possible-rotation bloquée	21
4.1.3 - Articulation	22
4.1.4 - Encastrement	23
4.2 - POINTE ENCASTREE	
Condition en tête :	
4.2.1 - Liberté totale	24
4.2.2 - Déplacement latéral possible - rotation bloquée	25
4.2.3 - Articulation	26
4.2.4 - Encastrement	27



$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$

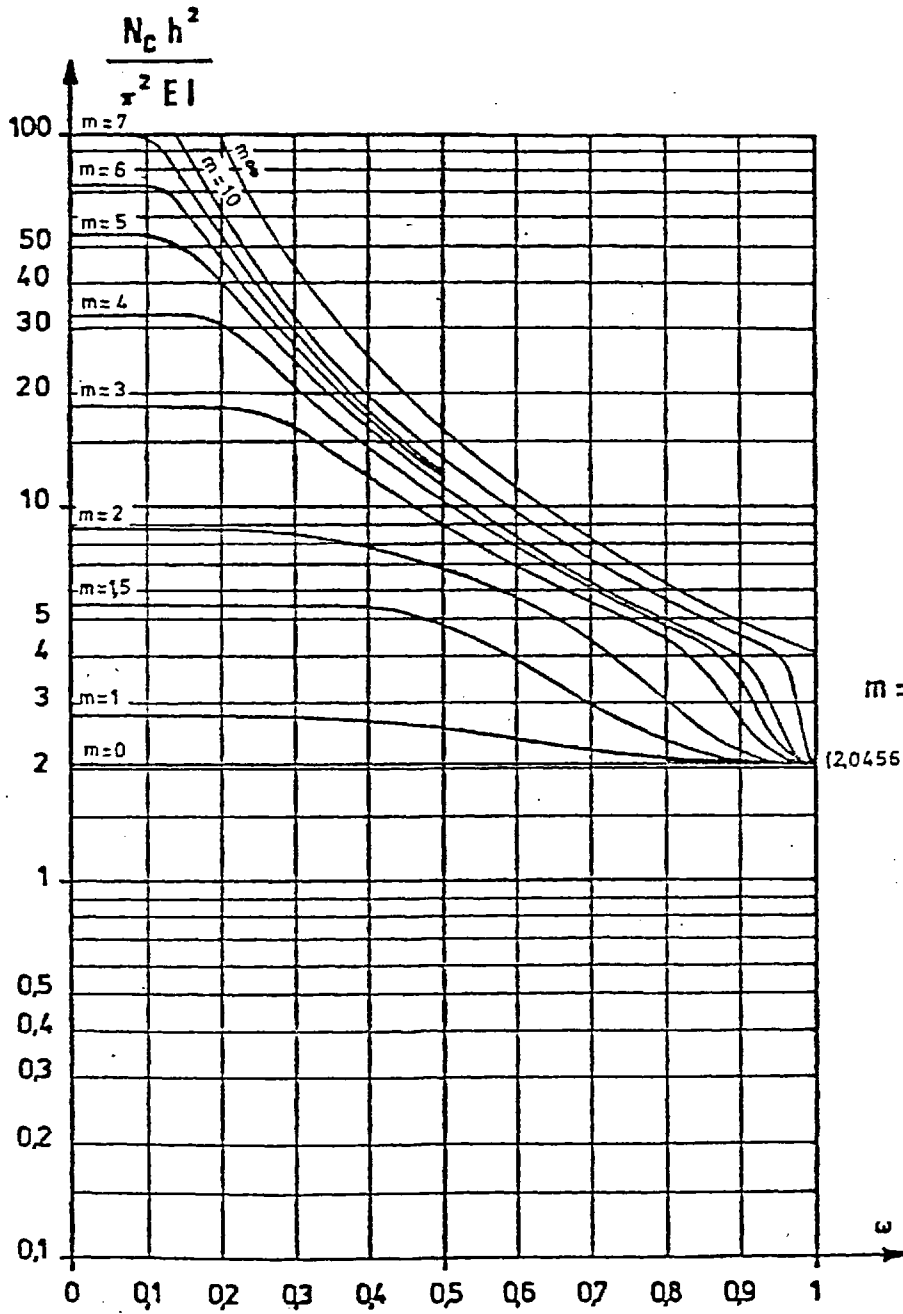
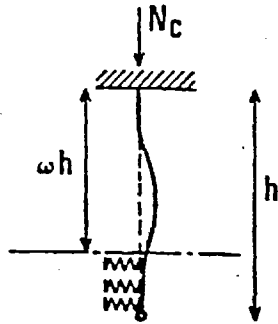


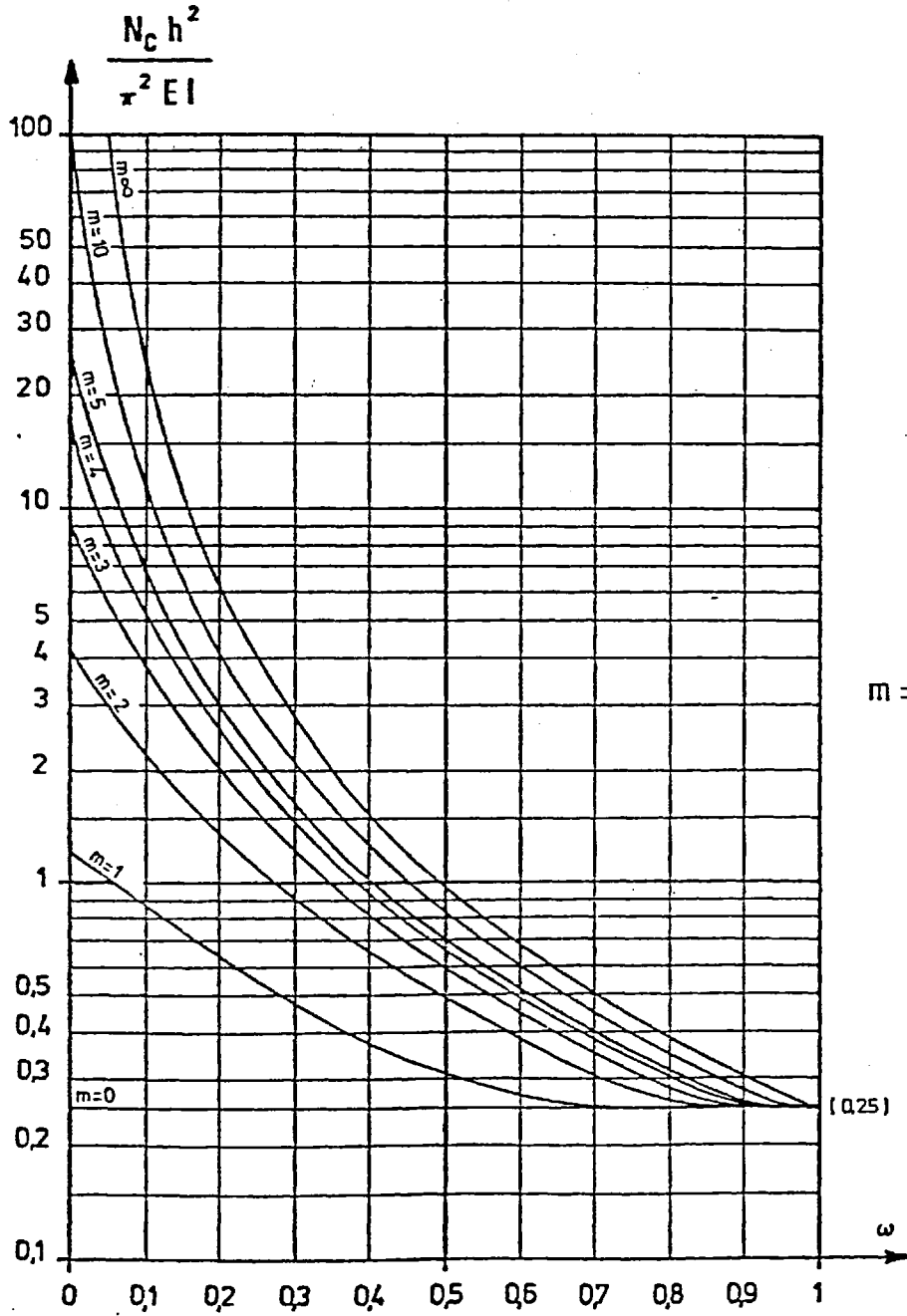
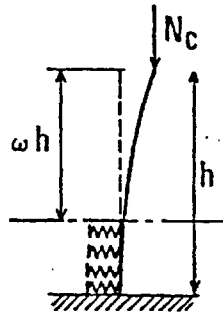
$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$



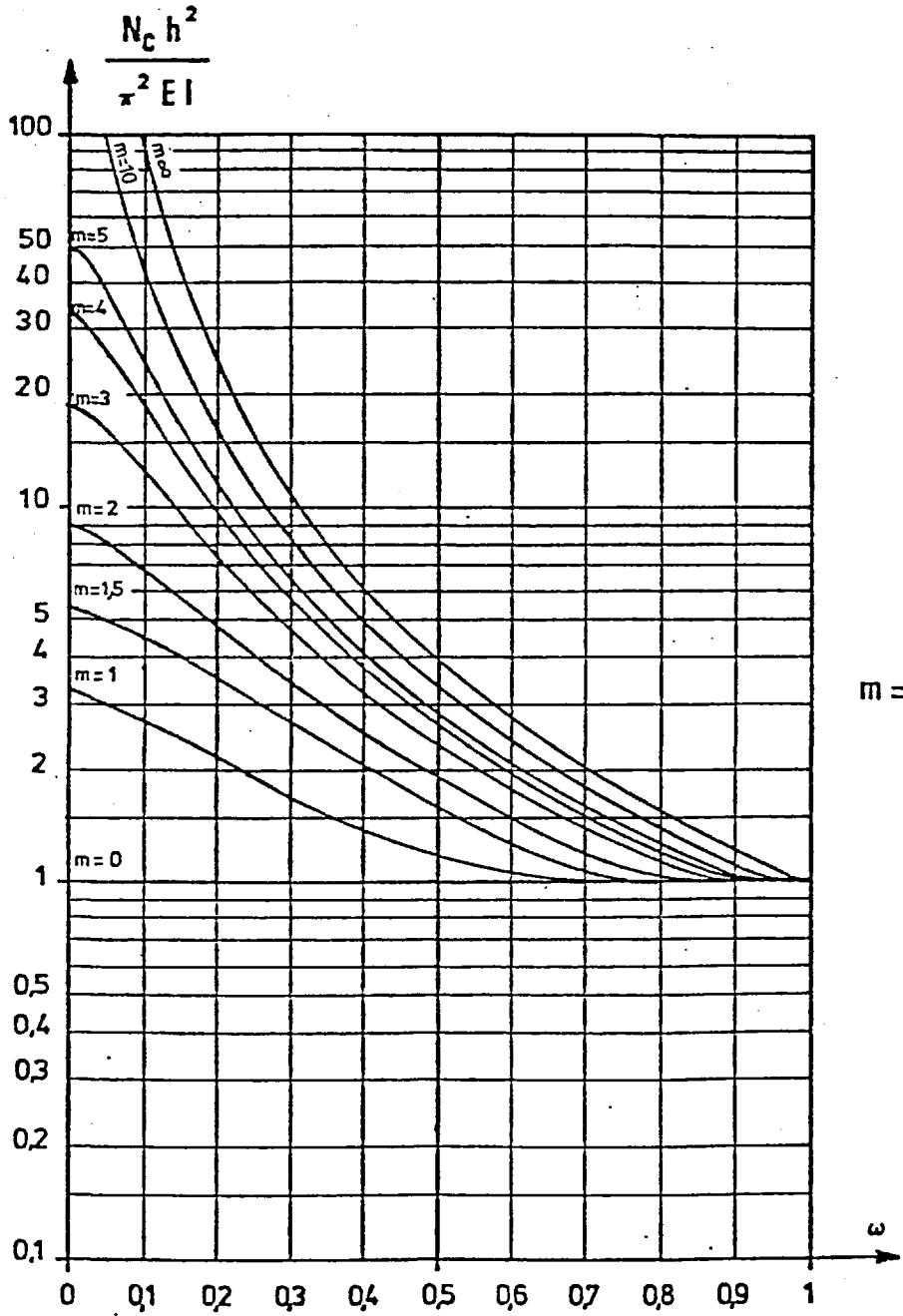
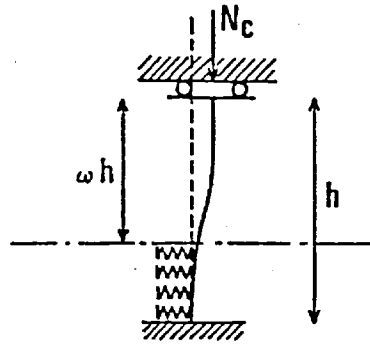
$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$

(2,0456)

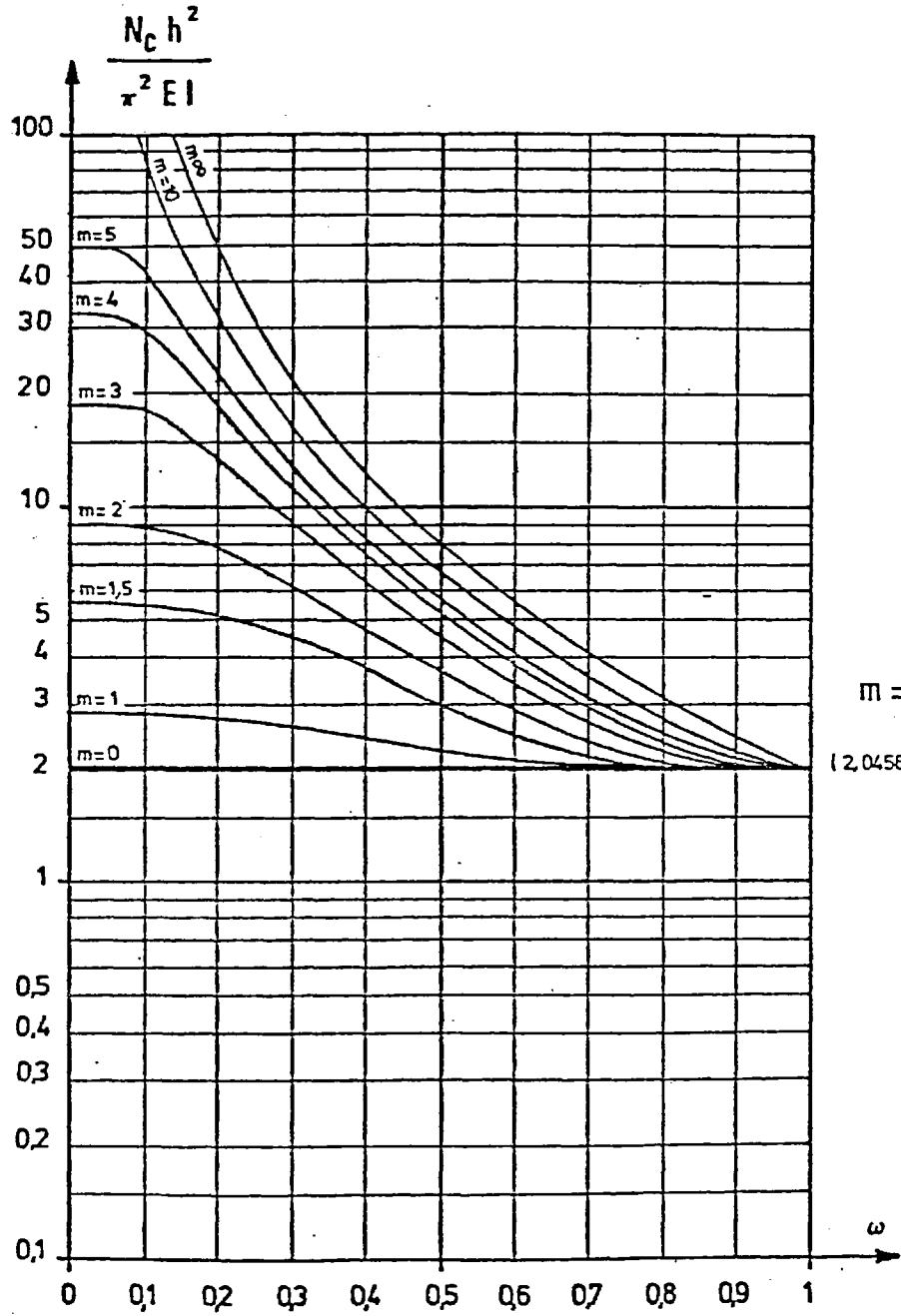
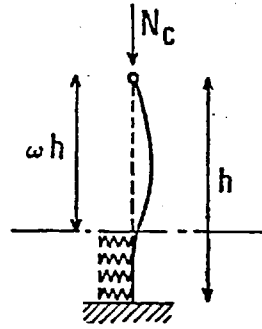


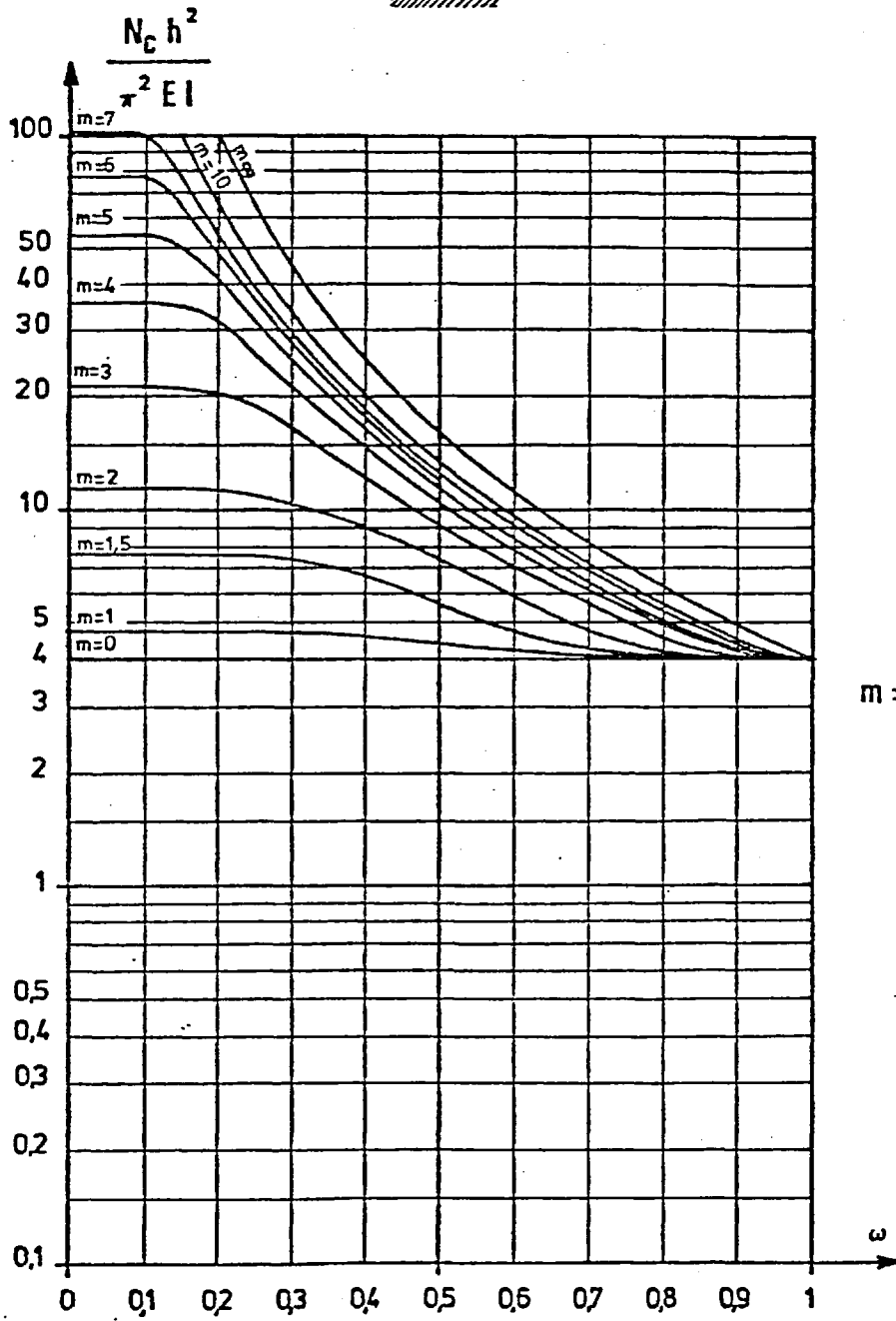
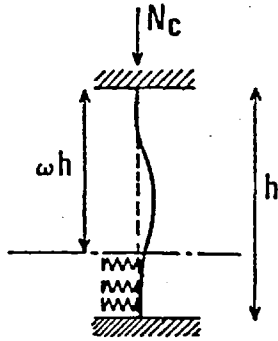


$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$



$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$





$$m = \frac{h}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}}$$